ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 30 maggio 2022

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

Data la successione di funzioni , definita per $x \in [0, +\infty)$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} 3 & se \quad 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ \\ 7 & se \quad x > \frac{1}{n}, \end{cases}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x)$.

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Risposta:

(i)

$$A = [0, +\infty)$$

$$f(x) = \begin{cases} 3 & se \quad x = 0 \\ \\ 7 & se \quad x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

(ii) La successione non converge uniformemente in A perchè per ogni n fissato

$$g_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)| = 4$$

e dunque

$$\lim_{n \to +\infty} g_n = 4 \neq 0$$

Converge uniformemente in ogni intervallo $B_\alpha = [\alpha, +\infty)$ con $\alpha > 0$ arbitrario. Infatti per ogni $\alpha > 0$ per tutti gli $n \in N$ tali che $n > \frac{1}{\alpha}$ (che equivale a $\frac{1}{n} < \alpha$), si ha

$$g_n = \sup_{B_\alpha} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{B_\alpha} |7 - 7| = 0$$

e dunque

$$\lim_{n \to +\infty} g_n = 0$$

E 2

Sia data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = \frac{1}{z - 1}.$$

a) Calcolare, usando esclusivamente la definizione di integrale curvilineo di una funzione di variabile complessa, il seguente integrale

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1}\, dz$$

dove

$$\gamma(t) = 1 + e^{it} \quad t \in [0, 2\pi];$$

dedurre, motivando la risposta, se la funzione ammette primitiva nell'insieme $A = C - \{1\}$.

b) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1}\, dz$$

dove γ è una qualunque curva chiusa regolare a tratti contenuta in $B = \{z \in C : |z| < 1\}$;

dedurre, motivando la risposta, se la funzione ammette primitiva nell'insieme $B = \{z \in C : |z| < 1\}$.

Risposta:

Nel caso a)

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1}\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} ie^{it} dt = 2\pi\, i \neq 0.$$

La curva è la circonferenza di centro 1 e raggio 1 ed è contenuta in $A = C - \{1\}$. La funzione, avendo integrale non nullo lungo una curva chiusa contenuta in $A = C - \{1\}$, non può ammettere primitiva in tale insieme.

Nel caso b), se γ è una generica curva chiusa contenuta in B, si ha

$$\int_\gamma \frac{1}{z-1}\, dz = 0$$

dal teorema di Cauchy in quanto $f(z)$ è olomorfa nell'insieme di cui γ è bordo.

Se ne deduce che in $B = \{z \in C : |z| < 1\}$ la funzione ammette primitiva perchè ha integrale nullo lungo tutte le curve chiuse contenute in B.

D 2

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta motivandola.

(1) Calcolare il seguente integrale curvilineo

$$\int_\gamma \frac{1}{2\, cosz - 1}\, dz$$

dove γ è la frontiera dell'insieme $T = \{z = x + iy \in C : -\frac{\pi}{2} \leq x \leq 2\pi, \ -1 \leq y \leq 1\}$.

a)$-2\pi i$

b) 0

c) $\pi i \frac{2}{\sqrt{3}}$

Risposta: c) Usare il teorema dei residui, osservando che solo tre dei punti singolari della funzione integranda cadono entro la curva γ , precisamente $z_1 = \frac{\pi}{3},\ z_2 = -\frac{\pi}{3},\ z_3 = \frac{5\pi}{3}$.

Osservare poi che $res(f(z), z_i) = -\frac{1}{2} \frac{1}{sen\, z_i}$, da cui la risposta.

(2) Usando la trasformata di Laplace, calcolare la soluzione (che chiameremo $y_n(t)$ perchè dipendente dal parametro $n \in N,\ n \geq 1$) del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) = -n^2 y(t), & t \geq 0 \\ y(2n) = 0 \\ y'(2n) = 1 \end{cases}$$

a)

$$y_n(t) = \frac{1}{n}\, sen[n(t-2n)] \quad t \geq 0$$

b)

$$y_n(t) = \frac{1}{n}\, sen[n(t+2n)] \quad t \geq 0$$

c)

$$y_n(t) = sen[n(t+2n)] \quad t \geq 0$$

Risposta: a) Poichè le condizioni iniziali non sono assegnate in $t = 0$, si pone $\tilde{y}_n(t) = y_n(t+2n)$ e si osserva che $\tilde{y}_n(t)$ risolve

$$\begin{cases} \tilde{y}''(t) = -n^2 \tilde{y}(t), & t \geq 0 \\ \tilde{y}(0) = 0 \\ \tilde{y}(0) = 1 \end{cases}$$

Applicando la trasformata di Laplace, si ottiene $\tilde{y}_n(t) = \frac{1}{n}\, sen\,(nt) \quad t \geq 0$, da cui

$$y_n(t) = \frac{1}{n}\, sen[n(t-2n)] \quad t \geq 0$$

(3) Scrivere gli sviluppi in serie di Laurent della funzione:

$$f(z) = sen\Big(\frac{1}{z^2}\Big) + \frac{1}{1+z^4}$$

nelle due corone circolari di centro l'origine in cui ciò è possibile

a)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2(2n+1)}(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{4n} \quad in \quad 0 < |z| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{z^{2(2n+1)}(2n+1)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{4(n+1)}} \quad in \quad |z| > 1$$

b)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Big[\frac{1}{z^{2(2n+1)}(2n+1)!} + z^n\Big] \quad in \quad |z| < 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \Big[\frac{1}{z^{2(2n+1)}(2n+1)!} + \frac{1}{z^{(n+1)}}\Big] \quad in \quad |z| > 1$$

c)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{z^{2(2n+1)}(2n+1)!}+z^{4n}\right] \quad in \quad 0<|z|<1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{z^{2(2n+1)}(2n+1)!}+\frac{1}{z^{4(n+1)}}\right] \quad in \quad |z|>1$$

Risposta: c) Si ha

$$sen\left(\frac{1}{z^2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{2(2n+1)}(2n+1)!} \qquad per\ |z|>0$$

Inoltre

$$\frac{1}{1+z^4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{4n} \quad per \quad |z|<1$$

e

$$\frac{1}{1+z^4}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{z^{4(n+1)}} \quad per \quad |z|>1.$$