ANALISI MATEMATICA 2
Laurea in Ingegneria Informatica e Automatica

Esame del 31 maggio 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

Data la successione di funzioni di variabile reale, definita per $x \in R$ da

$$f_n(x) = n^{x-1}, \quad n \geq 1 \quad x \in R$$

(cioè la successione $(n^{x-1})_{n\geq 1}$),

(i) trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x)$.

(ii) dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Risposta: L'insieme di convergenza puntuale è

$$A = (-\infty, 1]$$

e

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

(scrivere la funzione $f_n(x)$ come $n^{x-1} = e^{(x-1)logn}$).

La convergenza non può essere uniforme in A perchè la funzione limite è discontinua in A. È però uniforme in ogni sottoinsieme $B_\alpha = (-\infty, \alpha],\ \alpha < 1$ di A. Infatti

$$g_n = \sup_{B_\alpha} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{B_\alpha} n^{x-1} = n^{\alpha-1}$$

e dunque

$$\lim_{n\to\infty} g_n = 0$$

E 2

Trovare l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione di variabile complessa $f(z) = (z-1)^{i\pi}$ (determinazione principale della funzione potenza in campo complesso).

Date le due curve $\gamma_1(t) = x(t) + iy(t)$ definita per $t \in [1, 2]$ da

$$\begin{cases} x(t) = t \\ \\ y(t) = (t+2)^2 \end{cases}$$

e $\gamma_2(t) = x(t) + iy(t)$ definita per $t \in [1, 2]$ da

$$\begin{cases} x(t) = t \\ \\ y(t) = 7t + 2, \end{cases}$$

provare (senza calcolare gli integrali) che

$$\int_{\gamma_1} (z-1)^{i\pi} dz = \int_{\gamma_2} (z-1)^{i\pi} dz.$$

Enunciare e dimostrare brevemente il risultato teorico che si è usato.

Risposta: si osservi che $f(z) = (z-1)^{i\pi} = e^{i\pi Log(z-1)}$. Pertanto $I_{def} = C - \{1\}$, $I_{olom} = C - \{z = x + iy : x \leq 1, y = 0\}$.

La funzione integranda ammette primitiva nell'insieme $H = C - \{z = x + iy : x \leq 1, y = 0\}$ perchè tale insieme è semplicemente connesso ed essa è olomorfa in tale insieme. Pertanto l'integrale della funzione lungo una curva contenuta in H dipende solo dagli estremi della curva. Le due curve hanno gli stessi estremi e sono contenute nell'insieme H.

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

1) Definire la funzione $cosz\ z \in C$ (coseno in campo complesso). Provare che la funzione $f(z) = cos(2iz)$ non è invertibile in C. Dire in quale di questi insiemi la sua restrizione è invertibile

a) $A = \{z = x + iy : -\pi \leq x < 0,\ y \in R\}$

b) $A = \{z = x + iy :\ x \in R,\ -\pi \leq y < 0\}$

c) $A = \{z = x + iy :\ x \in R,\ 2\pi \leq y < 4\pi\}$.

2)

Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2\left(e^{(z+3i)} - 1\right)} dz$$

nei due seguenti casi:

$\gamma = \gamma_1$ é la curva definita da $|z + 3i| = 1$,

$\gamma = \gamma_2$ é la curva definita da $|z + 3i| = 4$.

a)

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2\left(e^{(z+3i)} - 1\right)} dz = 0, \qquad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2\left(e^{(z+3i)} - 1\right)} dz = -2\pi i\left[\frac{1}{9} + \frac{e^{3i}}{(e^{3i}-1)^2}\right]$$

b)

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2\left(e^{(z+3i)} - 1\right)} dz = \frac{2\pi i}{9}, \qquad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2\left(e^{(z+3i)} - 1\right)} dz = 2\pi i\left[\frac{1}{9} - \frac{1}{(e^{3i}-1)}\right]$$

c)

$$\int_{\gamma_1} \frac{1}{z^2\left(e^{(z+3i)} - 1\right)} dz = -\frac{2\pi i}{9}, \qquad \int_{\gamma_2} \frac{1}{z^2\left(e^{(z+3i)} - 1\right)} dz = -2\pi i\left[\frac{1}{9} + \frac{e^{3i}}{(e^{3i}-1)^2}\right]$$

3)

Definire l'ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e la trasformata di Laplace $L[f]$ di un segnale $f(t)$. Calcolare l'ascissa di convergenza e la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = \begin{cases} e^{5t} & 0 \le t \le 2\pi \\ \\ e^{-2t} & t > 2\pi \end{cases}$$

a)

$$\sigma[f] = -2 \qquad L[f] = \frac{1}{s-5} + \frac{1}{s+2}$$

b)

$$\sigma[f] = -2 \qquad L[f] = \frac{e^{(5-s)2\pi} - 1}{5-s} + \frac{e^{-(s+2)2\pi}}{s+2}$$

c)

$$\sigma[f] = 5 \qquad L[f] = \frac{e^{(5-s)2\pi} - 1}{5-s} - \frac{e^{(s+2)2\pi}}{s+2}$$

Risposta: b), c), b).