CONDIZIONI DI RACCORDO DEI CAMPI ELETTROMAGNETICI SULL'INTERFACCIA TRA DUE MEZZI OMOGENEI

Consideriamo le equazioni di Maxwell in una regione di spazio riempita da un mezzo omogeneo e isotropo caratterizzato da una costante dielettrica assoluta ε e da una permeabilità magnetica assoluta μ (eventualmente tale mezzo può essere il vuoto con $\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$):

1) $\oint_\Sigma \vec{D} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = q$,

2) $\oint_\Sigma \vec{B} \cdot \hat{n}\, d\Sigma = 0$,

3) $\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$,

4) $\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = i + \dfrac{d\Phi(\vec{D})}{dt}$.

Nella loro forma differenziale le equazioni (1-4) diventano:

5) $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$,

6) $\nabla \cdot \vec{B} = 0$,

7) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dfrac{d\vec{B}}{dt}$,

8) $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \dfrac{d\vec{D}}{dt}$.

Tali equazioni insieme alle relazioni costitutive del mezzo:

9) $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$,

10) $\vec{B} = \mu \vec{H}$,

permettono di ricavare i campi ***E, D, B, H*** in tutta la regione di spazio una volta che si conoscano le cariche libere q (o la densità di carica libera ρ) e la corrente impressa i (o la densità di corrente impressa ***j***) e le opportune condizioni al contorno ed iniziali.

Se la regione di spazio è, invece, riempita da due (o più) mezzi omogenei e isotropi (mezzo 1 e mezzo 2) con costanti dielettriche rispettivamente ε_1, ε_2 e permeabilità magnetiche μ_1, μ_2, il problema analitico andrà risolto separatamente in ogni mezzo omogeneo usando, per esempio, le equazioni (5-10) con i propri valori di ε e μ, poi si dovranno imporre delle condizioni di raccordo ai campi $\boldsymbol{E_1}, \boldsymbol{E_2}, \boldsymbol{D_1}, \boldsymbol{D_2}, \boldsymbol{B_1}, \boldsymbol{B_2}, \boldsymbol{H_1}, \boldsymbol{H_2}$ in prossimità dell'interfaccia Σ di separazione tra il mezzo 1 ed il mezzo 2. Per trovare le condizioni di raccordo usiamo le equazioni di Maxwell (1-4) che scritte in questa forma non presentano una dipendenza esplicita dal mezzo considerato.

Useremo le equazioni (1-4) in un opportuno intorno di un punto ***P*** sulla superficie Σ di separazione tra il mezzo 1 ed il mezzo 2 (vedi figura 1).

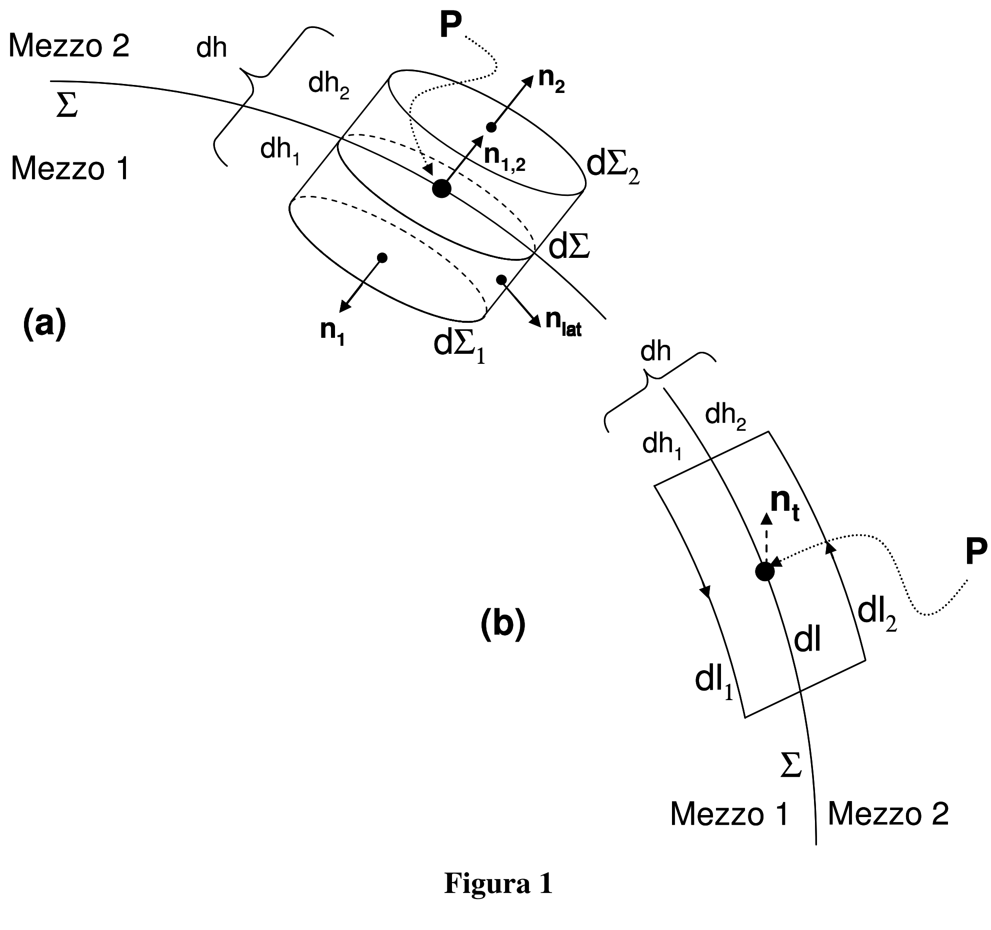
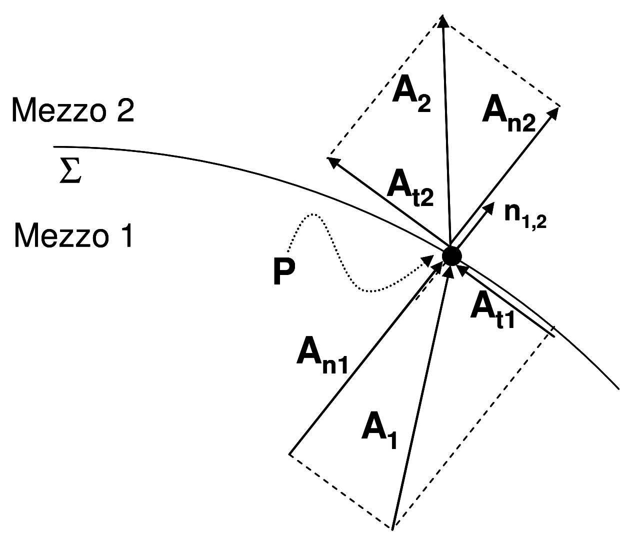


Figura 1

Nello specifico applicheremo le eq. (1-2) ad un intorno cilindrico del punto ***P*** (vedi figura 1a), tale intorno sarà scelto sufficientemente piccolo in modo da poter pensare alla superficie $d\Sigma$ di intersezione tra l'intorno cilindrico e la superficie Σ, come se fosse una superficie piana. Le superfici di base $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$ del cilindro saranno prese parallele alla superficie $d\Sigma$ e a essa congruenti. L'altezza del cilindro $dh=dh_1+dh_2$ sarà scelta in modo tale che la superficie laterale del cilindro risulti molto più piccola delle dimensioni di $d\Sigma$, risultando quindi essere un infinitesimo di ordine superiore.

Per quanto riguarda le eq. (3-4), esse saranno applicate a un intorno rettangolare di ***P*** (vedi figura 1b). Tale intorno avrà i lati maggiori dl_1 e dl_2 sufficientemente piccoli in modo da poter considerare la linea dl appartenente a Σ e contenuta nel piano definito dall'intorno rettangolare, come se fosse una linea retta. I lati dl_1 e dl_2 saranno presi quindi paralleli e congruenti a dl, mentre i lati minori del rettangolo, lunghi $dh=dh_1+dh_2$, saranno presi molto più piccoli dei corrispettivi lati maggiori in modo da risultare essere un infinitesimo di ordine superiore.

Per comodità prenderemo i campi orientati come in figura 2, con le componenti normali orientate secondo il versore normale uscente dal mezzo 1 ed entrante nel mezzo 2 ($\mathbf{n}_{1,2}$) e le componenti tangenziali concordi tra loro (è possibile prendere altre orientazioni, in questo caso i segni in alcune delle formule che seguono potrebbero essere diversi).



$\mathbf{A}_i=\{\mathbf{E}_i, \mathbf{D}_i, \mathbf{B}_i, \mathbf{H}_i\}$ con i=1,2

Figura 2

Ora consideriamo l'eq. (1), ci dice che il flusso di $\boldsymbol{D}$ uscente dal cilindro di figura 1a è pari alla carica q al suo interno. Tale flusso è la somma del flusso uscente dalle superfici $d\Sigma_1$, $d\Sigma_2$ e dalla superficie laterale del cilindro. Essendo le superfici $d\Sigma_1$ e $d\Sigma_2$ piccole possiamo pensare che il campo $\boldsymbol{D}$ non vari apprezzabilmente su tali superfici, per cui possiamo scrivere:

$$11)\ \Phi(\vec{D}) = \int_{d\Sigma 1} \vec{D}\cdot\hat{n}_1 d\Sigma + \int_{d\Sigma 2} \vec{D}\cdot\hat{n}_2 d\Sigma + \int_{d\Sigma lat} \vec{D}\cdot\hat{n}_{lat} d\Sigma = -D_{n1}d\Sigma_1 + D_{n2}d\Sigma_2 + \Phi_{lat} = q\ .$$

Essendo la superficie laterale molto più piccola (è un infinitesimo di ordine superiore), il flusso di $\boldsymbol{D}$ attraverso tale superficie può essere trascurato rispetto al flusso sulle superfici di base del cilindro (a meno che le componenti tangenziali di $\boldsymbol{D}$ divergano all'infinito), per cui la (11) diventa:

$$12)\ \Phi(\vec{D}) = -D_{n1}d\Sigma_1 + D_{n2}d\Sigma_2 = q = \int_{\tau = d\Sigma dh} \rho d\tau\ .$$

Essendo l'integrale a secondo membro calcolato sul volume racchiuso dal cilindro $d\tau = d\Sigma dh$, risulta un infinitesimo di ordine superiore rispetto ai flussi considerati precedentemente, quindi la carica q potrà essere trascurata se la densità di carica ρ non va all'infinito. In questo caso la (12) diventa:

$$13)\ \Phi(\vec{D}) = -D_{n1}d\Sigma_1 + D_{n2}d\Sigma_2 = 0$$

ed essendo $d\Sigma_1 = d\Sigma_2$ si ottiene

$$14)\ D_{n1} = D_{n2}$$

che rappresenta la condizione di raccordo tra le componenti normali di $\boldsymbol{D}$ all'interfaccia tra due dielettrici.

Eventualmente, nei casi di materiali conduttivi in cui nello strato superficiale $d\Sigma$ la densità di carica diverge, è possibile esprimere la carica q come $q = \int_{d\Sigma} \sigma d\Sigma$. In questo caso la (12) diventa:

$$15)\ \Phi(\vec{D}) = -D_{n1}d\Sigma_1 + D_{n2}d\Sigma_2 = q = \sigma d\Sigma$$

ed essendo $d\Sigma_1 = d\Sigma_2 = d\Sigma$ si ottiene:

$$16)\ D_{n2} = D_{n1} + \sigma$$

Che rappresenta la condizione di raccordo tra le componenti normali di ***D*** all'interfaccia tra due mezzi, quando è presente una densità di carica superficiale σ. La (16) si riduce alla (14) qualora risultasse $\sigma=0$.

Usando la (9) nella (16) si ottiene la condizione di raccordo tra le componenti normali di ***E*** all'interfaccia tra due mezzi:

17) $\varepsilon_2 E_{n2} = \varepsilon_1 E_{n1} + \sigma$.

Eseguendo ragionamenti simili applicati all'eq. (2) per il campo ***B*** si ottiene:

18) $B_{n2} = B_{n1}$

e considerando la (10) si ottiene per ***H***:

19) $\mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1}$.

La (18) e la (19) sono le condizioni di raccordo tra le componenti normali di ***B*** ed ***H*** all'interfaccia tra due mezzi.

Applicando la formula (3) al rettangolo di figura 1b e considerando che il vettore ***E*** non vari sensibilmente lungo i lati dl_1 e dl_2 del rettangolo, essendo piccoli, si ottiene:

20)
$$\begin{aligned}\oint_s \vec{E}\cdot d\vec{s} &= \int_{dl1} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{dl2} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{dh'} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{dh''} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \\ &= -E_{t1}dl_1 + E_{t2}dl_2 + \int_{dh'} \vec{E}\cdot d\vec{l} + \int_{dh''} \vec{E}\cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi(\vec{B})}{dt}\end{aligned}$$

Ora l'integrale di linea su i lati *dh'* e *dh''* lunghi *dh* possono essere trascurati rispetto agli integrali lungo i lati più lunghi dl_1 e dl_2 (a meno che il campo ***E*** non diverga all'infinito), pertanto la (20) diventa:

21) $-E_{t1}dl_1 + E_{t2}dl_2 = -\dfrac{d\Phi(\vec{B})}{dt}$.

In tale equazione il flusso di ***B*** va calcolato su una superficie che è un infinitesimo di ordine superiore rispetto alle grandezze geometriche dl_1 e dl_2, essendo $dh<<dl_1,dl_2$, per cui il flusso di ***B*** può essere trascurato (a meno che il campo ***B*** non diverga all'infinito). La (21) quindi diventa:

22) $-E_{t1}dl_1 + E_{t2}dl_2 = 0$ ed essendo $dl_1=dl_2$ si ha che:

23) $E_{t2} = E_{t1}$,

che rappresenta la condizione di raccordo per le componenti tangenziali del campo ***E*** all'interfaccia tra due mezzi. Usando la (9) nella (23) si ottiene:

24) $\frac{D_{t2}}{\varepsilon_2} = \frac{D_{t1}}{\varepsilon_1}$,

che rappresenta la condizione di raccordo per le componenti tangenziali del campo ***D*** all'interfaccia tra due mezzi.

Con ragionamenti simili applicati all'eq.(4) si ottiene:

25)
$$\oint_s \vec{H} \cdot d\vec{s} = \int_{dl1} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{dl2} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{dh'} \vec{H} \cdot d\vec{l} + \int_{dh''} \vec{H} \cdot d\vec{l} =$$
$$= -H_{t1}dl_1 + H_{t2}dl_2 + 0 + 0 = i + \frac{d\Phi(\vec{D})}{dt} = i + 0 = i = \int_{dldh} \vec{j} \cdot \hat{n}_t d\Sigma \quad ,$$

dove abbiamo trascurato gli integrali di linea lungo i lati corti (lunghi *dh*) e dove abbiamo trascurato il flusso di ***D*** per gli stessi motivi visti precedentemente. La corrente concatenata alla linea chiusa formata da dl_1 dl_2 e i due *dh*, può essere scritta come il flusso di ***j*** attraverso la superficie infinitesima *dldh* orientata secondo la normale $\boldsymbol{n_t}$ che segue la legge della mano destra (il pedice *t* ci ricorda che tale normale risulta tangente alla superficie Σ di separazione tra i due mezzi). Dato che *dh<<dl*, tale flusso può essere considerato un infinitesimo di ordine superiore rispetto agli integrali di linea nel primo membro di (25) (a meno di densità di correnti infinite, possibili sulle superfici dei conduttori perfetti). In questo caso la (25) diventa

26) $H_{t2}dl_2 = H_{t1}dl_1$ ed essendo $dl_1=dl_2$ si ha:

27) $H_{t2} = H_{t1}$,

che rappresenta la condizione di raccordo tra le componenti tangenziali di ***H*** all'interfaccia tra due mezzi non perfettamente conduttivi. Eventualmente, nei casi di materiali perfettamente conduttivi in cui nello strato superficiale Σ la densità di corrente può divergere, è possibile esprimere la corrente *i* come $i = \int_{dldh} \vec{j} \cdot \hat{n}_t d\Sigma = j_{s,nt} dl$ in cui con $j_{s,nt}$ indichiamo la densità di corrente superficiale lungo la direzione $\boldsymbol{n_t}$ tangente alla superficie Σ, ma perpendicolare alle componenti tangenti dei campi $\boldsymbol{H_1}$ e $\boldsymbol{H_2}$. In questo caso la (25) diventa:

28) $-H_{t1}dl_1 + H_{t2}dl_2 = \int_{dldh} \vec{j} \cdot \hat{n}_t d\Sigma = j_{s,nt} dl$, che essendo $dl_1=dl_2=dl$, risulta:

29) $H_{t2} = H_{t1} + j_{s,nt}$.

Tale equazione rappresenta la condizione di raccordo tra le componenti tangenziali di $\boldsymbol{H}$ all'interfaccia tra due mezzi perfettamente conduttivi. La (29) si riduce alla (27) nel caso in cui risultasse $j_{s,nt}=0$.

Usando la (10) nella (29) si ottiene si ottiene la condizione di raccordo tra le componenti tangenziali di $\boldsymbol{B}$ all'interfaccia tra due mezzi (eventualmente perfettamente conduttivi):

30) $\dfrac{B_{t2}}{\mu_2} = \dfrac{B_{t1}}{\mu_1} + j_{s,nt}$.

Riassumendo si ha:

Componenti normali	**Componenti tangenziali**
I. $D_{n2} = D_{n1} + \sigma$	V. $E_{t2} = E_{t1}$
II. $\varepsilon_2 E_{n2} = \varepsilon_1 E_{n1} + \sigma$	VI. $\dfrac{D_{t2}}{\varepsilon_2} = \dfrac{D_{t1}}{\varepsilon_1}$
III. $B_{n2} = B_{n1}$	VII. $H_{t2} = H_{t1} + j_{s,nt}$
IV. $\mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1}$	VIII. $\dfrac{B_{t2}}{\mu_2} = \dfrac{B_{t1}}{\mu_1} + j_{s,nt}$

Che nel caso in cui risultano $q=0$ ($\sigma=0$) e $i=0$ ($j_{s,nt}=0$) si riducono a:

Componenti normali	**Componenti tangenziali**
IX. $D_{n2} = D_{n1}$	XIII. $E_{t2} = E_{t1}$
X. $\varepsilon_2 E_{n2} = \varepsilon_1 E_{n1}$	XIV. $\dfrac{D_{t2}}{\varepsilon_2} = \dfrac{D_{t1}}{\varepsilon_1}$
XI. $B_{n2} = B_{n1}$	XV. $H_{t2} = H_{t1}$
XII. $\mu_2 H_{n2} = \mu_1 H_{n1}$	XVI. $\dfrac{B_{t2}}{\mu_2} = \dfrac{B_{t1}}{\mu_1}$

NOTA

Nel ricavare i campi elettromagnetici in una regione di spazio, (usando le formule 1-10) abbiamo supposto che la densità di carica elettrica ρ (o la relativa carica elettrica *q*) e la densità di corrente ***j*** (o la relativa corrente *i*) fossero note a priori, essendo per noi le cause immediate dei campi elettromagnetici. In alcuni problemi, può capitare che tali grandezze siano in tutto o in parte incognite del problema e dipendano quindi dai campi elettromagnetici che bisogna calcolare. In tal caso bisogna considerare, per il mezzo in questione, l'equazione costitutiva $\vec{j} = \sigma_{cond}\vec{E}$ in aggiunta alle (9-10) in cui σ_{cond} è la conducibilità del mezzo. La densità di corrente deve poi rispettare l'equazione di continuità $\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$ che è una conseguenza diretta delle eq. (5,8). Tale equazione di continuità, se applicata ad un intorno cilindrico del punto ***P***, con ragionamenti simili a quanto visto sopra, permette di ottenere le condizioni di raccordo per le componenti normali di ***j***: $j_{n2} = j_{n1} - \vec{\nabla}_s \cdot \vec{j}_s - \frac{\partial \sigma}{\partial t}$ dove $\vec{\nabla}_s = \vec{\nabla} - \hat{n}_{1,2}\frac{\partial}{\partial n_{1,2}}$ è l'operatore nabla trasverso e la $\vec{j}_s$ è la densità superficiale di corrente parallela alla superficie di separazione *Σ*. Queste considerazioni esulano dal programma normalmente svolto da un corso di Fisica Generale 2 e sono in genere affrontate in corsi successivi più approfonditi (per esempio il corso di Campi Elettromagnetici). Ai libri di testo di tali corsi rimandiamo il lettore che avesse intenzione di approfondire gli argomenti in questione.