MATEMATICA APPLICATA – MBIR

Diario delle lezioni A.A. 2018–19[1]

Questo documento è curato da Sandra Carillo, docente del corso.
Si rimanda lo studente a consultare tali siti; il primo dedicato a tutte le informazioni di carattere organizzativo ed informativo, il secondo al materiale distribuito in aula ed ulteriori informazioni di interesse per chi frequenta il corso.

---

martedì 26 febbraio 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Introduzione al corso e richiami su equazioni differenziali ordinarie (O.D.E.):
  - Definizione di equazioni differenziali ordinarie.
  - Definizione di **soluzione** di una O.D.E..
  - Equazioni differenziali ordinarie **lineari**.
  - Equazioni differenziali ordinarie **lineari omogenee**.
  - Equazioni differenziali ordinarie **lineari omogenee a coefficienti costanti**: metodo di soluzione (richiami dai corsi di Analisi Matematica).

---

mercoledì 27 febbraio 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Soluzione **per serie** di O.D.E. lineari a coefficienti costanti con esempi. Si cerca

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad a_0 \neq 0, \tag{1}$$

  - Esempio 1:

$$y' + \beta y = 0 \tag{2}$$

    si ottiene la soluzione già trovata mediante il polinomio caratteristico:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \beta^n}{n!} x^n \equiv e^{-\beta x} \quad \Longrightarrow \quad y(x) = c e^{-\beta x}\,, \quad \forall c \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

  - Esempio 2:

$$y'' + \omega^2 y = 0 \tag{4}$$

    si ottiene la soluzione già trovata mediante il polinomio caratteristico. Indicate con $y_1(x)$ e $y_2(x)$, due soluzioni indipendenti l'una dall'altra, si ottiene, per $a_0 = 1$ e $a_1 = 0$

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} x^{2n} \equiv \cos(\omega x) \tag{5}$$

    Analogamente (assegnato a casa agi studenti) se si scelgono $a_0 = 0$ e $a_1 = 1$ si ottiene la seconda soluzione indipendente dalla precedente:

$$y_2(x) = \sin(\omega x) \tag{6}$$

    e, quindi, la soluzione generale dell'equazione del moto armonico (4), è

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\,, \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} \tag{7}$$

    dove $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono date, rispettivamente da (5) e (6).

---

[1] Nel seguito *studente* indica, naturalmente, *studente e/o studentessa* e, analogamente, al plurale.

giovedì 28 febbraio 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Soluzione di equazioni differenziali ordinarie.
- Metodo di Frobenius: ricapitolazione dettagliata del metodo con altri esempi.
  (lezione alla lavagna per problemi di connessione).

---

venerdì 1 marzo 2019 *(3 ore - S. Carillo)*

- Soluzione di equazioni differenziali ordinarie.
- Metodo di Frobenius: illustrazione dettagliata del metodo.
  - Esempio 1 (equazione di Eulero)
    $$x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0 \quad . \tag{8}$$
    La soluzione generale, ottenuta ricercando soluzioni del tipo $y(x) = x^\beta$, è data da $y(x) = c_1 x + c_2 x^2$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
  - Esempio 2 (mediante il metodo di Frobenius)
    $$x^2(x^2-1)y'' - x(x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0 \tag{9}$$
    La soluzione generale, ottenuta ricercando soluzioni con il **metodo di Frobenius**, è data da
    $$y(x) = c_1 x + c_2 (\frac{1}{x} + 2x \ln x) \, , \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

---

martedì 5 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Metodo di Frobenius: dettaglio sull'applicazione del metodo con esempi.
- Determinazione della soluzione generale dell'equazione:
  $$x^2 y'' + (1+x)y' - 2y = 0 \tag{10}$$
- Studio del caso $\beta = 0$.
- Equazione di Legendre:
  $$(1-x^2)y'' - 2xy' + \beta(\beta+1)y = 0 \quad , \quad \beta \text{ assegnato.} \tag{11}$$

---

mercoledì 6 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Metodo di Frobenius

- Determinazione della soluzione generale dell'equazione:
  $$xy''(1-x)y' + 2y = 0. \tag{12}$$
- Equazione di Legendre:
  $$(1-x^2)y'' - 2xy' + \beta(\beta+1)y = 0 \quad , \quad \beta \text{ assegnato.} \tag{13}$$
- Soluzioni polinomiali.

---

giovedì 7 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Ricapitolazione o.d.e.s lineari a coefficienti continui
- Equazione di Lagrange (12): completato lo studio.
- Soluzioni polinomiali e formula di Rodriguez.

---

venerdì 8 marzo 2019 *(4 ore - S. Carillo)*

- Equazioni differenziali a derivate parziali (P.D.E.).
- **Soluzione stazionaria** di una P.D.E.: si ottiene una O.D.E..
- P.D.E. **lineari omogenee**.
  - Equazione delle onde del I ordine
    $$u_t + cu_x = 0$$
    .
  - Equazione del calore (II ordine)
    $$u_t - ku_{xx} = 0$$
    .
  - Equazione delle onde del II ordine
    $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$$
    .
- idea alla base del metodo di **separazione delle variabili**.

---

martedì 12 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Equazioni a derivate parziali.
- Equazioni lineari a coefficienti costanti.
- Equazione lineare delle onde del I ordine
  $$u_t \pm cu_x = 0 \ \ , \ \ c > 0 \tag{14}$$
- Equazione lineare delle onde del II ordine
  $$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \ \ , \ \ c > 0 \tag{15}$$

---

mercoledì 13 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Metodo di *separazione delle variabili*:
- Problema di trasmissione del calore: modello lineare unidimensionale $u : (0, L) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

$$u_t = K u_{xx} \quad , \quad K \text{ conducibilità termica} \tag{16}$$

  Caso di sbarretta rigida unidimensionale, assegnate le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = F(x). \tag{17}$$

  che rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante iniziale, e le condizioni al contorno;

$$u(0, t) = T_1 \quad , \quad u(L, t) = T_2 \, . \tag{18}$$

- Condizioni assegnate e metodo di separazione delle variabili: discussione.
- Soluzione dell'equazione del calore **stazionaria**.
- Problema con b.c. non omogenee risolto come sovrapposizione del problema stazionario con b.c. omogenee cui si somma la soluzione del problema dipendente dal tempo con b.c. omogenee.
- Si può applicare tale metodo perchè sussiste il **principo di sovrapposizione delle soluzioni** perchè l'equazione (19) è lineare e, quindi, date due soluzioni, una loro qualunque combinazione lineare è ancora soluzione.

---

giovedì 14 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Problema di trasmissione del calore: modello lineare unidimensionale $u : (0, L) \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

$$u_t = K u_{xx} \quad , \quad K \text{ conducibilità termica} \tag{19}$$

  Caso di sbarretta rigida unidimensionale circolare, assegnate le condizioni iniziali

$$u(x, 0) = F(x). \tag{20}$$

  che rappresenta la distribuzione della temperatura all'istante iniziale.
- Condizioni al contorno periodiche:

$$u(-L, t) = u(L, t) \quad , \quad u_x(-L, t) = u_x(L, t) \, . \tag{21}$$

- Studio del problema con il metodo di separazione delle variabili. (non finito)

---

venerdì 15 marzo 2019 *(4 ore - S. Carillo)*

- complementi di analisi funzionale:
  - spazi vettoriali finito ed infinito dimensionali (vettori di $\mathbb{R}^n, n = 1, 2, 3$ e spazi di funzioni)
  - norma.
  - prodotto scalare e norme indotta.
  - Esempi di spazi di funzioni: polinomi di Taylor e di Fourier.
  - Nozione di ortogonalità.
  - Spazi completi e rappresentazione di funzioni in tali spazi.

Riferimento: Barozzi SINTESI p.1-20, 41-59 (materiale di interesse fino a pag 67 inclusa), p.81-83: fatti essenziali su serie di portenze.

- Problema di trasmissione del calore: modello lineare unidimensionale (conclusione del problema con b.c. periodiche: condizioni inziali assegnate.
- Discussione e confronto sulle autofunzioni trovate nei due casi del problema sbarretta lineare e circolare.
- Problema del calore: lamina rettangolare con assegnate b.c. costanti.
- studio problema stazionario con b.c. non omogenee.
- metodo di separazione delle variabili e sovrapposizione delle soluzioni: soluzione come somma di 4 problemi nei quali, a turno su di un solo lato sono assegnate b.c. non omogenee.

---

martedì 19 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Problema di trasmissione del calore sul rettangolo:

$$u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) = 0 \;\;,\;\; u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \tag{22}$$

- Condizioni al contorno e condizione iniziale.
- Introduzione al metodo di separazione delle variabili.
- Metodo di separazione delle variabili e condizioni al contorno non omogenee.
- Decomposizione del problema in:
  - Problema stazionario che verifica le condizioni assegnate.
  - Problema di evoluzione con condizioni al contorno omogenee.
  - costruzione della soluzione del problema assegnato utilizzando la **linearità** dell'equazione (22).
- Studio del problema stazionario: equazione di Laplace sul rettangolo

$$w_{xx} + w_{yy} = 0 \;\;,\;\; w|_{\partial\Omega} \text{ assegnata.} \quad w : \Omega \to \mathbb{R}. \tag{23}$$

  La frontiera di Ω, è data da $\partial\Omega = \cup_{i=1}^{4} \gamma_i$, dove,

$$\gamma_1 : \begin{cases} x(s) = 0 \\ y(s) = s \end{cases} \qquad \gamma_2 : \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = H \end{cases} \qquad \gamma_3 : \begin{cases} x(s) = L \\ y(s) = s \end{cases} \qquad \gamma_4 : \begin{cases} x(s) = s \\ y(s) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

  nelle equazioni parametriche (24) $s \in (0, H)$ per γ_1, γ_3 e $s \in (0, L)$ per γ_2, γ_4.

- Risoluzione del problema stazionario come sovrapposizione delle soluzioni di 4 problemi nei quali, rispettivamente si hanno dati omogenei su tre lati e, ad uno solo sono imposte le condizioni al contorno non omogenee assegnate.
- Costruzione della soluzione del problema non stazionario come combinazione lineare della soluzione del problema stazionario con le assegnate condizioni al contorno, cui va sommata la soluzione del problema dipendente dal tempo in le condizioni al contorno sono omogenee.
- N.B. La condizione iniziale va modificata tenendo conto non solo del dato assegnato, ma anche della soluzione stazionarie trovata.

---

mercoledì 20 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

- Continuazione del problema affrontato nella lezione precedente.
- Confronto tra la soluzione dell'equazione di Laplace

$$w_{k\,xx} + w_{k\,yy} = 0 \;\;,\;\; w_k|_{\partial\Omega} \text{ assegnata.} \quad w_k : \Omega \to \mathbb{R} \;\;,\;\; k = 1,2 \tag{25}$$

  nel caso delle condizioni al contorno seguenti:

$$P_1 : \qquad w_1(0,y) = G_1(y) \;\;,\;\; w_1(L,y) = 0 \;\;,\;\; w_1(x,0) = w_1(x,H) = 0. \tag{26}$$

$$P_2 : \qquad w_2(0,y) = w_2(L,y) = 0 \;\;,\;\; w_2(x,0) = 0. \;\;,\;\; w_2(x,H) = F_2(x) \tag{27}$$

- Costruzione della soluzione del problema in cui il dato al contorno è non omogeneo sui due lati di Ω

---

giovedì 21 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Riferimento *Haberman Cap. 7: Higher dimensional p.d.es*

- Ricapitolazione p.d.e.s lineari a coefficienti costanti viste fino ad ora. (proiettando pagine dal libro)
- Equazione del calore ed equazione delle onde in due dimensioni spaziali.
- Problema della membrana rettangolare vibrante con assegnate condizioni iniziali e al contorno.
- Osservazione: il problema può essere affrontato mediante il **metodo di separazione delle variabili**, poichè **lineare**. Infatti, decomponiamo il problema in:
  - problema stazionario con condizioni al contorno **non omogenee**
  - problema non stazionario con condizioni al contorno **omogenee**
  - otteniamo la soluzione come somma delle soluzioni ottenute.

---

venerdì 22 marzo 2019 *(4 ore - S. Carillo)*

- Equazione di Laplace sul rettangolo $\Delta\phi = 0$ con condizioni al contorno assegnate, cioè

$$\phi|_{\gamma_3} = \Delta\phi|_{\gamma_1} = \Delta\phi|_{\gamma_4} = 0 \;\;,\;\; \phi|_{\gamma_2} = F(x) \;\; .$$

- Equazione di Laplace con assegnate condizioni al contorno con Ω cerchio aperto di $\mathbb{R}^2$, di raggio $a > 0$.
- Passaggio di coordinate da cartesiane a polari:
  a) $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \to U \subset \mathbb{R}^2$ dove

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}, \;\; U = (0,a) \times (-\pi,\pi) \;\subset \mathbb{R}^2. \tag{28}$$

  b) N.B.: i punti della frontiera di Ω, corrispondono ai punti del segmento $\rho = a, -\pi \leq \theta \leq \pi$.
  c) Quali condizioni bisogna imporre sulla rimanente parte di ∂U? In particolare, quali condizioni vanno imposte sui segmenti $(0,\rho) \times \{a\}$,$\{\pi\} \times (0,a)$ e $\{-\pi\} \times (0,a)$, che corrispondono, in coordinate cartesiane, a punti interni all'aperto Ω?
  d) Nel cambiamento di coordinate da cartesiane a polari, l'origine $x = y = 0$ corrisponde al segmento $\rho = 0, -\pi \leq \theta \leq \pi$. Quali condizioni bisogna imporre su tale segmento ?
- Parte seconda: introduzione all'uso del *Tollbox* di calcolo simbolico di MatLab.

- illustrazione di varie funzioni che si utilizzano nell'ambito del corso.
- soluzione di problemi di Cauchy (o.d.e. lineari a coefficienti costanti).
- visualizzazione di funzioni di una variabile.
- calcolo di integrali.
- visualizzazione di due esempi di polinomi di Fourier relativi a due funzioni, l'una continua e l'altra con discontinuità di I specie (*salto*). Differenza tra convergenza uniforme e puntuale: confronto tra i grafici.
- uso del Toolbox per applicare il metodo di Frobenius.

Martedì 26 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Problema stazionario sul cerchio di cetro l'origine e raggio $a > 0$.

$$\Delta u = 0 u|_{\partial\Omega} \text{assegnata,} \tag{29}$$

dove $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}$ e $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

- Cambio di coordinate da cartesiane a polari

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \quad (\rho, \theta) \in U = (0, a) \times (-\pi, \pi) \end{cases} \tag{30}$$

- Osservazioni sulla corrispondenza tra punti di Ω e punti di U:
  -
  $$\partial\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = a^2\}$$

  mentre

  $$\partial U = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i \quad \text{dove} \quad \gamma_1 = (0, a) \times \{-\pi\}, \quad \gamma_2 = \{a\} \times (-\pi, \pi), \quad \gamma_3 = (0, a) \times \{\pi\}, \quad \gamma_4 = \{0\} \times (-\pi, \pi)$$

  - N.B.: la frontiera di Ω corrisponde al segmento γ_2.
  - Condizioni da imporre su $\partial\Omega$: codizioni *periodiche* su γ_1 and γ_3.
  - Il segmento γ_4 corrisponde all'origine nel piano x, y.
- operatore di Laplace in coordinate polari:

$$\Delta = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{31}$$

- Soluzione del problema

$$\begin{cases} \Delta\phi = 0 \\ \phi|_{\partial U} \quad \text{assegnata} \end{cases} \tag{32}$$

  mediante il metodo di separazione delle variabili.

Mercoledì 27 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Problema del calore sul cerchio

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 lea^2\}$$

$$\begin{cases} u_t = K\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \,, \\ u|_{\partial\Omega} \quad \text{assegnata} \\ u(x,y,t)|_{t=0} = \tilde{F}(x,y) \end{cases} \tag{33}$$

Metodo di soluzione (basato sulla linearità del problema) la soluzione. Cerchiamo la soluzione di (33) come somma della soluzione w del problema stazionario che verifica le condizioni al contorno assegnate, $u(x,y,t) = w(x,y) + v(x,y,t)$ dove:

$$\mathcal{P}_1 \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \,, \ \text{equazione stazionaria} \\ w|_{\partial\Omega} \quad \text{assegnata} \end{cases} \tag{34}$$

e del problema non stazionario con condizioni al contorno omogenee

$$\mathcal{P}_2 \begin{cases} v_t = K\left(v_{xx} + v_{yy}\right) \,, & \text{equazione non stazionaria} \\ u|_{\partial\Omega} = 0 & \text{b.c. omogenee} \\ u(x,y,t)|_{t=0} = F(x,y) & \text{dove} \quad F(x,y) = \tilde{F}(x,y) - w(x,y) \end{cases} \tag{35}$$

Soluzione del problema $\mathcal{P}_2$ non stazionario mediante il metodo di separazione delle variabili.

Giovedì 28 marzo 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

– Equazione di Bessel

$$x^2 f'' + x f' + (x^2 - n^2) f = 0 \quad , \quad n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{36}$$

  e sua soluzione per $n \geq 0$.

– caso $n = 0$.

– Caso $n > 0$ soluzione mediante il metodo di Frobenius.

– Funzioni de Bessel di I e II specie.

Venerdì 29 marzo 2019 *(4 ore - S. Carillo)*

Problema del calore non stazionario con condizioni al contorno omogenee sul cerchio. Soluzione mediante il metodo di separazione delle variabili.

– Soluzione mediante il metodo di separazione delle variabili. Ricordando la

– condizione $\lim_{\to 0} |f(x)| < \infty$. solo le funzioni de Bessel di I specie sono autofunzioni del problema.

– determinazione dei corrispondenti autovalori.

– Costruzione della soluzione del problema di trasmissione del calore nel caso di piastra circolare con condizioni al contorno omogenee.

– introduzione all'uso del *Toolbox di calcolo simbolico* di MatLab con esempi.

---

martedì 2 aprile 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

(lezione svolta alla lavagna tradizionale)

- Problemi in tre dimensioni spaziali:
  - Metodo di risoluzione.

Mercoledì 3 aprile 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Studio del problema stazionario di conduzione del calore in un cilindro circolare retto con condizioni al contorno non omogenee.

$$\Delta u = 0 u|_{\partial\Omega} \text{assegnata}, \tag{37}$$

dove $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \le a^2, 0 < z < H\}$

Giovedì 4 aprile 2019 *(2 ore - S. Carillo)*

Pendolo semplice ed introduzione ai metodi perturbativi.

Venerdì 5 aprile 2019 *(4 ore - S. Carillo)*

Metodo perturbativo diretto con esempi.

- Uso del *Toolbox di calcolo simbolico* di MatLab con esempi.
  - Il sistema è *debolmente* dissipativo: dimostrazione.
  - Rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
  - Metodo perturbativo diretto applicato al *toy problem* per illustrare il metodo perturbativo diretto (STFWD)
    $$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\, \varepsilon^k. \tag{38}$$
  - Convergenza uniforme e condizione $|x_k(t)| < M \quad , \quad \forall k$.
  - Determinazione di $x(t) \simeq x_0(t)$ e $x(t) \simeq x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$.
  - Confronto tra le due soluzioni approssimate e condizione di limitatezza di $x_0(t)$ e $x_1(t)$ ed intervallo di validità della soluzione approssimata trovata.
  - Soluzione esatta.
  - Confronto tra le soluzioni approssimate e quella esatta.
