Lezioni svolte dalla prof. S. Carillo (3 CFU)

FISICA MATEMATICA – MMER
Diario delle lezioni A.A. 2018–19[1]

Questo documento è curato da Daniele Andreucci (resp. 3 CFU) e Sandra Carillo, (co-doc. 3 CFU) docenti del corso.
Si rimanda lo studente a consultare tali siti; il primo dedicato a tutte le informazioni di carattere organizzativo ed informativo, il secondo al materiale distribuito in aula ed ulteriori informazioni di interesse per chi frequenta il corso.

Giovedì 27 settembre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

- Motivazione e panoramica sul programma del modulo (3 CFU) riguardante studio di equazioni differenziali mediante metodi qualitativi e perturbativi.
- Teoremi di conservazione dell'energia e sistemi meccanici ad un solo grado di libertà.
- Esempio: pendolo semplice. Cioè, punto P di massa m, soggetto al peso, vincolato, bilateralmente e senza attrito, ad appartenere ad una circonferenza, in un piano verticale.
  - equazione del moto e teorema di conservazione.
  - piano delle fasi.
  - piccole oscillazioni.
- motivazione dei metodi perturbativi prendendo spunto dal problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \ddot{\theta} = \omega^2 \sin(\theta) \\ \theta(0) \ = \varepsilon \\ \dot{\theta}(0) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

  dove $\omega 2 := \frac{g}{R}$, $0 < \varepsilon << 1$ avendo indicato con R il raggio della circonferenza cui è vincolato il punto P.

- Introducendo $x := \frac{\theta}{\varepsilon}$, il problema (1) si scrive

$$\begin{cases} \ddot{x} = \omega^2 \sin(\varepsilon x) \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

---

[1] Nel seguito *studente* indica, naturalmente, *studente e/o studentessa* e, analogamente, al plurale.

Giovedì 11 ottobre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

Metodo perturbativo diretto (STFWD): illustrazione ed esempi.

- Oscillatore *debolmente* smorzato:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

  - Il sistema è *debolmente* dissipativo: dimostrazione.
  - Rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
  - Metodo perturbativo diretto applicato al *toy problem* per illustrare il metodo perturbativo diretto (STFWD)

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t)\ \varepsilon^k. \tag{4}$$

  - Convergenza uniforme e condizione $|x_k(t)| < M \ , \ \forall k$.
  - Determinazione di $x(t) \simeq x_0(t)$ e $x(t) \simeq x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$.
  - Confronto tra le due soluzioni approssimate e condizione di limitatezza di $x_0(t)$ e $x_1(t)$ ed intervallo di validità della soluzione approssimata trovata.
  - Soluzione esatta.
  - Confronto tra le soluzioni approssimate e quella esatta.

- Equazione di Duffing:

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \frac{\varepsilon^2}{6}x^3 = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \ = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{5}$$

  - Il sistema è *conservativo*: dimostrazione.
  - Rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
  - Applicazione del metodo perturbativo diretto (STFWD) (4).
  - Determinazione di $x(t) \simeq x_0(t)$ e $x(t) \simeq x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$.
  - Confronto tra le due soluzioni approssimate e condizione di limitatezza di $x_0(t)$ e $x_1(t)$ ed intervallo di validità della soluzione approssimata trovata.
  - Osservazione: in questo caso non è possibile trovare analiticamente la soluzione esatta. Il confronto, quindi, può solo essere fatto con soluzioni numeriche che, quindi, sono affette da errori di calcolo.

Giovedì 18 ottobre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

Metodo delle scale multiple: illustrazione ed esempi.

- Oscillatore *debolmente* smorzato:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + x = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \;= 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

  - N.B. Già dimostrato che il sistema è *debolmente* dissipativo e fornito la rappresentazione del sistema dinamico nel piano delle fasi.
  - Metodo delle scale multiple applicato al *toy problem* per illustrare il metodo

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k(t,\tau)\,\varepsilon^k \quad , \quad \tau := \varepsilon t. \tag{7}$$

  - Convergenza uniforme e condizione $|x_k(t,\tau)| < M \;\; , \;\; \forall k$.
  - Osservazione sull'operatore

$$\frac{d}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{\partial t} + \varepsilon \frac{d}{\partial \tau}$$

  - Costruzione della successione di problemi ottenuti applicando il principio di identità dei polinomi alla serie di potenze in ε.
  - Osservazioni sulle condizioni iniziali da imporre ai vari ordini.
  - Determinazione di $x(t) \simeq x_0(t,\tau)$ e $x(t) \simeq x_0(t,\tau) + \varepsilon x_1(t,\tau)$.
  - Confronto tra le due soluzioni approssimate e condizione di limitatezza di $x_0(t,\tau)$ e $x_1(t,\tau)$ ed intervallo di validità della soluzione approssimata trovata.
  - Soluzione esatta, già vista nella lezione precedente: richiamo.
  - Confronto tra le soluzioni approssimate e quella esatta.
  - Illustrazione dell'applicazione del metodo utilizzando il calcolo simbolico (MUPAD toolbox di MatLab).
  - Visualizzazione, con proiezione sullo schermo, dei risultati ottenuti e confronto tra il metodo perturbativo diretto, quello delle scale multiple e la soluzione esatta.

Giovedì 25 ottobre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

Problemi singolari con assegnate condizioni al contorno: illustrazione ed esempi. Consideriamo il seguente esempio di *strato limite*:

$$\begin{cases} \varepsilon^2 y'' + \varepsilon x y' - y = -e^x \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 2 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{8}$$

- N.B.Il problema è un *problema perturbativo singolare* poichè ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale è ridotto.
- L'applicazione del metodo perturbativo diretto in (8), definito mediante la (4), fornisce

$$y_0 = e^x \tag{9}$$

  N.B. non abbiamo ottenuto una equazione differenziale, ma una funzione della variabile x che non verifica né la condizione $y(0) \ = 2$, né la condizione $y(1) \ = 1$. Quindi, possiamo pensare che la soluzione del problema assegnato possa essere approssimata dalla funzione $y_0(x) = e^x$ per $a < x < b$ dove $0 < a << 1$ e $0 << b < 1$.

- Metodo dello Strato limite: idea del metodo e applicazione all'esempio considerato.
  - Ipotesi di strato *sottile* nell'intorno di $x = 0$ nel quale la derivata seconda di y sia di ordine ε^{-2} in modo tale che il prodotto $\varepsilon^2 y''$ non sia un termine *piccolo* rispetto agli altri termini che compaiono nell'equazione differenziale. In dettaglio
  - Introduzione delle nuove variabili:

$$X := \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \ , \quad Y := y \quad \text{when} \quad x \in (0, a), \quad a << 1 \tag{10}$$

  - determinazione di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che, nelle nuove variabili X, Y, l'equazione differenziale non sia singolare. Cioè, dalla sostituzione di (10) in (8), si ottiene:

$$\varepsilon^{2-2-\alpha} Y'' + \varepsilon X Y' - Y = -e^{\varepsilon^{-\alpha} X} \tag{11}$$

    se chiediamo che i termini

$$(1) \ \text{order of} \ (3) \implies \alpha = 1$$

    invece

$$(1) \ \text{order of} \ (2) \implies \alpha = \frac{1}{2}$$

  - analizziamo le due scelte e vediamo che la seconda NON risolve il problema perchè produce

$$\varepsilon Y'' + \varepsilon X Y' - Y = -e^{\sqrt{\varepsilon} X}$$

    invece per $\alpha = 1$, si ottiene l'equazione differenziale:

$$Y'' + \varepsilon X Y' - Y = -e^{\varepsilon X}. \tag{12}$$

  - Applicazione all'equazione (12) del metodo perturbativo diretto: cioè cerchiamo

$$Y(X) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(X) \ \varepsilon^k. \tag{13}$$

    che verifica la condizione $Y(0) = 2$.
  - Applichiamo il metodo perturbativo diretto al problema ottenuto.
  - Osservazione: per $x \in (0,1)$, segue $X \in (0, +\infty)$, per $\varepsilon \to 0$. Quindi otteniamo una famiglia ad un parametro di soluzioni.

- Il parametro libero viene determinato imponendo il *matching* della soluzione ottenuta nell'intorno dell'origine. Imponiamo
$$\lim_{X\to\infty} Y_0(X) = A, \quad \text{dove} \quad A := \lim_{x\to 0} y_0(x). \tag{14}$$
- costruiamo la *soluzione composita*, all'ordine zero:
$$y_{comp}(x) = y_0(x) + Y_0(\frac{x}{\varepsilon}) - A. \tag{15}$$
La soluzione ottenuta verifica la condizione al contorno nel punto $x = 0$.
- Quindi, bisogna ripetere lo stesso procedimento nell'intorno del punto $x = 1$. Si introducono quindi le nuove variabili:
$$\widetilde{x} := \frac{x-1}{\varepsilon^\beta} \quad , \quad \widetilde{y} := y \quad \text{when} \quad x \in (b, 1), \quad 0 << b \tag{16}$$
- determinazione di $\beta \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che, nelle nuove variabili $\widetilde{x}, \widetilde{y}$, l'equazione differenziale non sia singolare.
- si ripete la stessa procedura par lo *strato sottile* nell'intorno del punto $x = 1$. (i.e., trovato β, si scrive l'equazione differenziale non singolare nella incognita funzione $\widetilde{y} : \mathbb{R}^- \to$, si applica ad essa il metodo perturbativo diretto, imponendo la condizione $\widetilde{y}(1) = 1$, trovata e determinando il parametro *libero* imponendo la condizione di *matching* della soluzione ottenuta nell'intorno del punto $x = 1$.

• discussione del metodo e dei risultati ottenuti.

Giovedì 8 novembre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

Problemi singolari con assegnate condizioni al contorno: illustrazione ed esempi. Consideriamo il seguente esempio di *strato limite*:

$$\begin{cases} \varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{17}$$

- N.B.Il problema è un *problema perturbativo singolare* poichè ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale è ridotto dal secondo al primo.
- L'applicazione del metodo perturbativo diretto in (8), definito mediante la (4), fornisce, all'*ordine zero*,

$$\begin{cases} 2y_0' + 2y_0 = 0 \quad , \\ y_0(0) \ = 0 \quad \text{oppure} \quad y_0(1) = 1 \end{cases} \tag{18}$$

  N.B. abbiamo ottenuto una equazione differenziale, del I ordine cui non possiamo imporre le due condizioni al contorno assegnate. Quindi, dobbiamo scegliere quale condizione imporre. Poichè la soluzione unica di (18) che soddisfa la condizione $y_0(0) \ = 0$ è la soluzione banale $y_0(x) \ = 0$, consideriamo

$$\begin{cases} 2y_0' + 2y_0 = 0 \quad , \ a < x < 1, a << 1 \\ y_0(1) = 1 \end{cases} \tag{19}$$

  Ipotizziamo, cioè che vi sia uno *strato sottile* nell'intorno (destro) dell'origine. La soluzione del problema (19) è:

$$y_0(x) = e^{1-x} \tag{20}$$

  che approssima la soluzione del problema assegnato per $a < x < 1$ dove $0 < a << 1$.

- Metodo dello Strato limite: idea del metodo e applicazione all'esempio considerato.
  - Ipotesi di strato *sottile* nell'intorno di $x = 0$ nel quale la derivata seconda di y sia di ordine ε^{-1} in modo tale che il prodotto $\varepsilon y''$ non sia un termine *piccolo* rispetto agli altri termini che compaiono nell'equazione differenziale. In dettaglio
  - Introduzione delle nuove variabili:

$$X := \frac{x}{\varepsilon^\alpha} \ , \quad Y := y \quad \text{when} \quad x \in (0, a), \quad a << 1 \tag{21}$$

  - determinazione di $\alpha \in \mathbb{R}^+$ in modo tale che, nelle nuove variabili X, Y, l'equazione differenziale non sia singolare. Cioè, dalla sostituzione di (21) in (17), si ottiene:

$$\varepsilon^{1-2\alpha} Y'' + 2\varepsilon^{-\alpha} Y' + 2Y = 0 \tag{22}$$

    se chiediamo che i termini

$$(1) \ \text{order of} \ (2) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 1$$

    invece

$$(1) \ \text{order of} \ (3) \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}$$

  - analizziamo le due scelte e vediamo che la seconda NON risolve il problema perchè produce

$$Y'' + 2\varepsilon^{-1/2} Y' + 2Y = 0$$

    invece per $\alpha = 1$, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\varepsilon^{-1} Y'' + 2\varepsilon^{-1} Y' - Y = 0.$$

    che, moltiplicata per $\varepsilon > 0$, fornisce

$$Y'' + 2Y' + 2\varepsilon Y = 0. \tag{23}$$

- Applicazione all'equazione (23) del metodo perturbativo diretto: cioè cerchiamo

$$Y(X) = \sum_{k=0}^{\infty} Y_k(X)\, \varepsilon^k. \tag{24}$$

  che verifica la condizione $Y(0) = 0$.
- Applichiamo il metodo perturbativo diretto al problema ottenuto.
- Osservazione: per $x \in (0,1)$, segue $X \in (0,+\infty)$, per $\varepsilon \to 0$. Quindi otteniamo una famiglia ad un parametro di soluzioni.
- Il parametro libero viene determinato imponendo il *matching* della soluzione ottenuta nell'intorno dell'origine. Imponiamo

$$\lim_{X\to\infty} Y_0(X) = A, \quad \text{dove} \quad A := \lim_{x\to 0} y_0(x). \tag{25}$$

- costruiamo la *soluzione composita*, all'ordine zero:

$$y_{comp}(x) = y_0(x) + Y_0(\frac{x}{\varepsilon}) - A. \tag{26}$$

  La soluzione ottenuta verifica la condizione al contorno nel punto $x = 0$.

• costruzione della soluzione esatta del problema.

• confronto tra soluzione esatta ed approssimata.

• discussione del metodo e dei risultati ottenuti.

• In riferimento al problema (17), costruzione della soluzione composita all'ordine 1, ripercorrendo tutti i passi visti nella lezione precedente.

Giovedì 15 novembre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

Un esempio di problema non-lineare con uno *strato limite interno*

$$\begin{cases} \varepsilon y'' - (y'-1)y = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 1 \\ y(1) = -1 \end{cases} \tag{27}$$

- Il problema è un *problema perturbativo singolare* poichè ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale passa dal secondo al primo ordine.
- Applicazione del metodo perturbativo diretto e sui limiti.
- Metodo dello strato sottile nel caso in cui la posizione dello strato all'interno dell'intervallo $(0,1)$, in questo caso, non è nota.
- problemi nell'applicazione del metodo.
- Ordini successivi di approssimazione.
- Confronto con altri problemi.

Un esempio di problema non-lineare con un parametro piccolo: il modello non-lineare di van der Pol. Tale modello può essere usato come approssimazione del funzionamento cardiaco.

$$\begin{cases} y'' + \varepsilon(y^2-1)y' + y = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{28}$$

- Il problema è un *problema perturbativo regolare* poichè ponendo $\varepsilon = 0$ l'ordine dell'equazione differenziale è del secondo ordine come la (28).
- Applicazione del metodo perturbativo diretto e sui limiti.
- Scale multiple e problemi nell'applicazione del metodo.
- Ordini successivi di approssimazione.
- Confronto con altri problemi.

Giovedì 22 novembre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

- Problemi con *strato limite*. Considerati gli esempi
  - uno strato sottile
$$\begin{cases} \varepsilon y'' + 2y' + 2y = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 0 \\ y(1) = 1 \end{cases} \tag{29}$$
  - due strati sottili
$$\begin{cases} \varepsilon^2 y'' + \varepsilon x y' - y = -e^x \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 2 \\ y(1) = 1 \ . \end{cases} \tag{30}$$
- Illustrazione dell'applicazione del metodo perturbativo utilizzando il calcolo simbolico (MUPAD toolbox di MatLab), ricordando i risultati analitici precedentemente ottenuti.
- Visualizzazione, con proiezione sullo schermo, dei risultati ottenuti e confronto tra il metodo perturbativo (strati limite) e la soluzione esatta.
- Visualizzazione dei grafici relativi alle soluzioni approssimate ottenute.
- Confronto diretto tra le soluzioni esatte (ove possibile (29)) ed approssimate a complemento dello studio analitico precedentemente fatto.
- Cenno all'applicazione di metodi perturbativi ad equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali. Un esempio: ricerca di soluzioni *piccole* dell'equazione di Burgers
$$u_t = u_{xx} + 2uu_x \quad , \quad |u| << 1. \tag{31}$$
- Cenno ad altri metodi di soluzione di equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali. La trasformazione di Cole-Hopf.
- Possibili temi da trattare in elaborati personali da parte degli studenti.

  (Materiale messo a disposizione sulla piattaforma Elearning).

  `https://elearning.uniroma1.it/course/view.php?id=4650`

Giovedì 29 novembre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

- Problemi con *soluzioni periodiche*. Caso di sistemi dinamici conservativi nonlineari nei quali la soluzione ottenuta con il metodo perturbativo diretto non è limitata.
- metodo delle scale multiple adattato a problemi con *soluzioni periodiche*. Si sviluppa in serie (formale) di potenze nel parametro *piccolo* ε la pulsazione ponendo:

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \varepsilon\omega_2 + \dots \; . \tag{32}$$

  - Pendolo semplice. Dato il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \theta'' + \sin\theta = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ \theta(0) \; = \varepsilon \\ \theta'(0) = 0 \end{cases} \tag{33}$$

    * come scrivere il problema in modo da trattarlo con un metodo perturbativo.
      - Introduzione della variabile dipendente:

$$x := \frac{\theta}{\varepsilon} \; ; \tag{34}$$

      mediante la quale il problema (33) diventa

$$\begin{cases} \varepsilon\ddot{x} + \sin(\varepsilon x) = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \; = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \; . \end{cases} \tag{35}$$

      - Soluzione mediante il metodo perturbativo diretto.
      - Confronto con il corrispondente problema nel caso dell'equazione di Duffing:

$$\begin{cases} \ddot{x} + x - \varepsilon^2 x^3 = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ x(0) \; = 1 \\ \dot{x}(0) = 0 \; . \end{cases} \tag{36}$$

  - Applicazione del metodo delle scale multiple, con periodo dato dalla (32), allo studio del problema di Cauchy (36).

Lunedì 3 dicembre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

- Confronto tra metodo delle scale multiple con periodo variabile e non in riferimento all'equazione di Duffing.
- Limiti di applicazione del metodo.
- Suggerimenti e domande studenti relativamente ai temi da trattare in elaborati personali da parte degli studenti. (Materiale messo a disposizione sulla piattaforma Elearning).
  `https://elearning.uniroma1.it/course/view.php?id=4650`

Giovedì 6 dicembre 2018 *(2 ore - S. Carillo)*

- Ricevimento studenti: Suggerimenti e domande studenti relativamente ai temi da trattare in elaborati personali da parte degli studenti.

Giovedì 13 dicembre 2018 *(3 ore - S. Carillo)*

Metodo delle scale multiple: caso di soluzioni periodiche.equazione di Mathieu:

$$\begin{cases} y'' + (1 + \varepsilon\delta + \varepsilon\cos(kt))y = 0 \quad , \qquad 0 < \varepsilon << 1 \\ y(0) \ = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \tag{37}$$

–
- Il metodo perturbativo diretto produce soluzioni non limitate, per tempi *lunghi* in analogia con quanto visto nei casi dell'oscillatore debolmente smorzato che delle equazioni di Duffing a del pendolo.
- Metodo delle scale multiple applicato al problema (37);

$$y(t) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k(t, \tau)\ \varepsilon^k \ \ , \ \ \tau := \varepsilon t. \tag{38}$$

- Convergenza uniforme e condizione $|y_k(t, \tau)| < M \ \ , \ \ \forall k$.
- Osservazione sull'operatore

$$\frac{d}{dt} \quad \longrightarrow \quad \frac{d}{\partial t} + \varepsilon \frac{d}{\partial \tau}$$

- Costruzione della successione di problemi ottenuti applicando il principio di identità dei polinomi alla serie di potenze in ε.
- Osservazioni sulle condizioni iniziali da imporre ai vari ordini.
- Determinazione di $x(t) \simeq y_0(t, \tau)$ e $y(t) \simeq x_0(t, \tau) + \varepsilon y_1(t, \tau)$.
- Problema all'*ordine zero*:

$$\begin{cases} y_{0\,tt} + y_0 = 0 \quad , \\ y_0(0, 0) \ = 1 \quad y_{0\,t}(0, 0) = 0 \end{cases} \tag{39}$$

- Soluzione della forma

$$y_0(t, \tau) = A(\tau)e^{it} + A^*(\tau)e^{-it} \quad , \quad A \in \mathbb{C}\,, \tag{40}$$

  dove A^* indica il complesso coniugato di A. Le condizioni iniziali forniscono delle condizioni sui valori di $A(0)$ e $A^*(0)$.
- Problema all'*ordine uno*:

$$\begin{cases} y_{1\,tt} + y_1 = -2y_{0\,t\tau} - (\delta + \cos(kt))y_0 \quad , \\ y_1(0, 0) \ = 0 \\ y_{1\,t}(0, 0) = -y_{0\,\tau}(0, 0) \end{cases} \tag{41}$$

- Si ottiene la soluzione *limitata* imponendo che il termine noto nell'equazione (**??**) non sia in risonanza con l'operatore differenziale nella stessa equazione. Conviene usare la rappresentazione con esponenziali complessi anche del termine $\cos(kt)$.
- Metodo WKB per equazioni differenziali ordinarie del tipo:

$$y'' + \omega^2(\varepsilon t)y = 0 \tag{42}$$

- Conclusione del corso.
- Suggerimenti e domande da parte degli studenti.