

# **FISICA II**

## **Dispense degli argomenti aggiuntivi trattati nel corso di Ingegneria Civile (in aggiornamento)**

Massimo Germano

30 settembre 2015

## Indice

<b>1</b>	<b>Campo elettrico sull'asse mediano di una bacchetta carica di lunghezza <math>L</math></b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Teorema della divergenza</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>Teorema della circuitazione</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Sviluppo del potenziale in multipoli</b>	<b>3</b>
<b>5</b>	<b>Densità di energia elettrica in funzione del campo elettrico</b>	<b>5</b>
<b>6</b>	<b>Relazione tra il vettore intensità di polarizzazione <math>\mathbf{P}</math> e le densità di cariche di polarizzazione <math>\sigma_p</math> e <math>\rho_p</math></b>	<b>7</b>
<b>7</b>	<b>Modello per la polarizzazione per deformazione</b>	<b>8</b>
<b>8</b>	<b>Modello per l'interazione dei campi con la materia attraverso il meccanismo dell'orientamento: polarizzazione elettrica, paramagnetismo, ferromagnetismo</b>	<b>10</b>
8.1	Polarizzazione elettrica per orientamento . . . . .	11
8.2	Paramagnetismo . . . . .	12
8.3	Ferromagnetismo . . . . .	12
<b>9</b>	<b>Vettore di Poynting</b>	<b>13</b>

## **1 Campo elettrico sull'asse mediano di una bacchetta carica di lunghezza $L$**

Consideriamo la formula del campo elettrico creato da un corpo avente una distribuzione di carica continua,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (1)$$

sulla bacchetta  $dq$  può essere visto distribuito in un'unica dimensione lineare con densità di carica lineica  $\lambda$  per cui  $dq = \lambda dy$ . Ciascuna carica elementare sulla bacchetta fornirà un contributo al vettore campo elettrico sull'asse  $x$  con un angolo  $\theta$ ; le componenti  $y$  dei contributi avranno risultante nulla mentre si sommeranno

tutti i contributi delle componenti lungo l'asse  $x$ :  $dE_x = dE \cos \theta$ . Il campo elettrico sull'asse avrà allora solo componente lungo l'asse ed espressione data dall'integrale

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \hat{\mathbf{x}} \int_L \frac{\lambda dy}{r^2} \cos \theta. \quad (2)$$

Poiché  $y, \theta, r$  sono interdipendenti, bisogna esprimere tutto in un'unica variabile, per esempio  $\theta$ : dal momento che  $y/x = \tan \theta$  e  $r \cos \theta = x$ , ne consegue che  $dy = x d\theta / (\cos^2 \theta)$  e  $r^2 = x^2 / (\cos^2 \theta)$ ; sostituendo e supponendo  $\lambda$  uniforme, si avrà

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{x}}}{x} \int_{-\theta_1(x)}^{\theta_1(x)} \cos \theta d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{x}}}{x} 2 \sin \theta_1(x), \quad (3)$$

dove  $\theta_1(x) = \arctan(L/2x)$ . Nel caso particolare che la bacchetta sia di lunghezza infinita (oppure  $L \gg x$ ) allora  $\theta_1 = \pi/2$  e

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\hat{\mathbf{x}}}{x}. \quad (4)$$

## 2 Teorema della divergenza

Consideriamo un campo vettoriale  $\mathbf{F}$  e un cubetto elementare di lati  $dx, dy$  e  $dz$ . Dalla figura, calcoliamo il flusso di  $\mathbf{F}$

## 3 Teorema della circuitazione

## 4 Sviluppo del potenziale in multipoli

Consideriamo un insieme di  $n$  cariche puntiformi disposte in una zona di spazio caratterizzata da una dimensione caratteristica  $d$  e affrontiamo il problema di ricavare l'espressione del potenziale elettrico generato da questo sistema in un punto  $A$  posto a distanza  $R \gg d$  dal sistema stesso (vedi figura)

L'espressione esatta del potenziale generato nel punto  $P$  da tutte le cariche è

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{r_i} \quad (5)$$

dove  $r_i = |\mathbf{R} - \mathbf{d}_i|$ . Utilizzando l'approssimazione della distanza, si può porre

$$r_i \simeq R - d_i \cos \theta_i = R - \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{R}}{R} = R \left( 1 - \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right) \quad (6)$$

cioè

$$\frac{1}{r_i} \simeq \frac{1}{R} \frac{1}{\left( 1 - \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{R}}{R^2} \right)} \simeq \frac{1}{R} \left( 1 + \frac{\mathbf{d}_i \cdot \mathbf{R}}{R^2} + \dots \right) \quad (7)$$

Figura 1: Calcolo del potenziale in un punto  $P$  posto a grande distanza da un sistema di  $n$  cariche puntiformi

Sostituendo questa espressione in quella del potenziale (5), si ottiene

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{R}}{R^3} + \dots \quad (8)$$

dove  $Q = \sum_{i=1}^n q_i$  è la carica netta del sistema e rappresenta l'effetto dell'espansione di monopolo all'ordine zero (andamento del potenziale  $\simeq 1/R$ ) e  $\mathbf{P} = \sum_i q_i \mathbf{d}_i$  è il momento di dipolo della distribuzione e compare nell'approssimazione di dipolo del primo ordine (andamento del potenziale  $\simeq 1/R^2$ ). Agli ordini superiori poi corrisponderanno espansioni di quadrupolo, ottupolo ecc.

## 5 Densità di energia elettrica in funzione del campo elettrico

L'energia potenziale elettrostatica che spetta ad un sistema di  $n$  cariche puntiformi, nel vuoto, è data dalla seguente espressione

$$U = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1, n} \sum_{j \neq i} \frac{Q_i Q_j}{r_{ij}}. \quad (9)$$

D'altra parte

$$V_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j \neq i} \frac{Q_j}{r_{ij}} \quad (10)$$

è il potenziale creato nel punto della carica  $i$ -esima da tutte le  $j$ -esime cariche (tranne la  $i$ -esima stessa ovviamente) del sistema, quindi si può scrivere

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1, n} Q_i V_i. \quad (11)$$

Se si considera una distribuzione continua di cariche sia di volume che di superficie, allora nel passaggio al limite la sommatoria diventa un integrale e l'espressione per l'energia diventa rispettivamente

$$U = \frac{1}{2} \int_{\tau} \rho V d\tau \quad e \quad U = \frac{1}{2} \int_S \sigma V dS. \quad (12)$$

Partiamo dall'espressione che contiene la densità di carica di volume  $\rho$ , esprimendo quest'ultima in funzione del campo elettrico grazie alla prima legge di Maxwell

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} (\nabla \cdot \mathbf{E}) V d\tau; \quad (13)$$

costruiamo un vettore moltiplicando il campo elettrico  $\mathbf{E}$  per il potenziale  $V$  e facciamone la divergenza:  $\nabla \cdot (\mathbf{E}V) = (\nabla \cdot \mathbf{E})V + \mathbf{E} \cdot \nabla V$ . Sostituendo il primo termine sulla destra di questa espressione nella (13) si ottiene

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \int_{\tau} \nabla \cdot (\mathbf{E}V) d\tau - \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \nabla V d\tau \right]; \quad (14)$$

il primo integrale, essendo un integrale di volume di una divergenza può essere trasformato in un integrale superficiale grazie al teorema della divergenza, mentre nel secondo si può sostituire  $-\nabla V = \mathbf{E}$

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \left[ \oint_S V \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\tau} E^2 d\tau \right]. \quad (15)$$

Dal momento che gli integrali devono essere estesi a tutto lo spazio, il primo termine contenente il flusso attraverso una superficie chiusa del vettore  $(V\mathbf{E})$  tende a zero poiché, tale vettore, va a zero come  $\sim 1/r^3$  mentre la superficie cresce come  $\sim r^2$ , rimane così solamente il secondo termine

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\tau} E^2 d\tau \quad (16)$$

che definisce la densità di energia di volume, nel vuoto, in funzione del campo elettrico

$$u = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2. \quad (17)$$

Se il mezzo materiale non è il vuoto, la prima legge di Maxwell si scrive  $\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$  per cui gli stessi passaggi effettuati sopra portano all'espressione

$$u = \frac{1}{2}\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}. \quad (18)$$

## 6 Relazione tra il vettore intensità di polarizzazione $\mathbf{P}$ e le densità di cariche di polarizzazione $\sigma_p$ e $\rho_p$

Consideriamo dapprima l'espressione del potenziale in un punto a distanza  $r$  da un dipolo avente momento di dipolo  $\mathbf{p}$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}}}{r^2}. \quad (19)$$

Esso si può esprimere introducendo il gradiente di  $1/r$  il quale ha la forma  $\nabla\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$  per cui

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right). \quad (20)$$

In un materiale polarizzato di intensità di polarizzazione  $\mathbf{P}$  ogni elemento infinitesimo di volume  $d\tau$  possiede un momento di dipolo elementare  $\mathbf{P}d\tau$  che fornisce quindi un contributo elementare  $dV$  al potenziale in un punto alla distanza  $r$ , dato da

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\mathbf{P}d\tau) \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right). \quad (21)$$

Il cambio di segno è dovuto al fatto che nell'espressione (20),  $r$  è il vettore che va dal centro del dipolo  $O$ , considerato fisso, fino al punto in cui si vuole calcolare il potenziale e la differenziazione va fatta rispetto alle coordinate di tale punto mentre, nel caso del materiale polarizzato, il punto in cui si calcola il potenziale generato è fisso e la posizione del dipolo  $\mathbf{P}d\tau$  varia, nel volume del materiale, per considerare tutti i contributi. Infine il potenziale totale si

troverà integrando in tutto il volume del materiale polarizzato

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \left[ \mathbf{P} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right) \right] d\tau. \quad (22)$$

Consideriamo ora la divergenza di un vettore dato dal rapporto tra il vettore di polarizzazione e la distanza,

$$\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{P}}{r} \right) = \frac{1}{r} \nabla \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \nabla \left( \frac{1}{r} \right). \quad (23)$$

Sostituendo l'ultimo termine nella (22), essa diventa

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{P}}{r} \right) d\tau - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{1}{r} (\nabla \cdot \mathbf{P}) d\tau. \quad (24)$$

Utilizzando il teorema della divergenza, il primo termine diventa un integrale esteso alla superficie  $S$  che racchiude il volume  $\tau$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{1}{r} (\nabla \cdot \mathbf{P}) d\tau. \quad (25)$$

Dal momento che, date le densità di carica superficiali  $\sigma$  e di volume  $\rho$ , il potenziale ha espressione, rispettivamente

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{r} \sigma dS \quad \text{e} \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{1}{r} \rho d\tau \quad (26)$$

allora, confrontando la (25) con la (26), si ricavano le relazioni cercate

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} &= \sigma_p \\ -\nabla \cdot \mathbf{P} &= \rho_p. \end{aligned} \quad (27)$$

## 7 Modello per la polarizzazione per deformazione

Consideriamo un modellino di atomo avente simmetria nella distribuzione della carica positiva e negativa (assenza di un momento di dipolo elettrico proprio); sono non polari, ad esempio, le molecole monoatomiche  $H, He, Ne, Ar$ , le biatomiche simmetriche  $H_2, N_2, O_2$  o le poliatomiche a disposizione simmetrica come  $CO_2$ . Consideriamo quindi un atomo di idrogeno con la carica positiva del nucleo



$+e$  circondata da una carica negativa  $-e$ . La grande rapidità di movimento dell'elettrone ( $10^{-15}$ s per percorrere un'orbita del modello di Bohr) unita alla probabilità quantistica di trovare, dopo una misura, l'elettrone in un punto qualsiasi attorno all'atomo, permette di modellizzare queste proprietà, classicamente, come una nube sferica di carica continua, la cui carica totale sia  $-e$ , avente densità sfericamente simmetrica e decadente esponenzialmente allontanandosi dal nucleo tanto che in un raggio di  $2.2 \cdot 10^{-10}$ m risulta contenuta il 99 per cento di tutta la carica.

Tale atomo, risente di un campo esterno  $E$  applicato e dell'azione degli altri atomi che lo circondano. La risultante di tutti questi effetti può essere vista come un campo efficace  $E_{eff}$  sentito dall'atomo. L'effetto sarà quello di spostare il nucleo positivo nel verso del campo e il centro della nube elettronica sferica nella direzione contraria finché si raggiungerà un equilibrio in cui i due centri si trovano a distanza  $s$  uno dall'altro. L'equilibrio si raggiunge quando il modulo della forza sul nucleo positivo  $eE_{eff}$  è bilanciata dall'attrazione di quest'ultimo per la sfera negativa di raggio  $s$  e viceversa. La carica contenuta in questa sfera di raggio  $s$  (supponendo per il momento una densità di carica uniforme) sarà  $-e(s/a)^3$  dove  $a$  è il raggio di tutta la sfera elettronica. Quindi

$$eE_{eff} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\left(\frac{s}{a}\right)^3 e \cdot e}{s^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2 s}{a^3} \quad (28)$$

Da questa equazione si ricava lo spostamento  $s$  e infine il momento di dipolo dell'atomo (microscopico) corretto per un fattore  $9/2$  dovuto ad un calcolo quantistico più preciso (es. la densità non è uniforme)

$$\mathbf{p}_{mic} = es = 4\pi\epsilon_0 \frac{9}{2} a^3 \mathbf{E}_{eff}. \quad (29)$$

Il fattore di proporzionalità tra il momento di dipolo e il campo elettrico si chiama polarizzabilità (elettronica in questo calcolo)  $\alpha_e = 4\pi\epsilon_0(9/2)a^3$ . Tenendo conto anche dell'esistenza di piccoli spostamenti tra atomi o ioni si può aggiungere anche una polarizzabilità atomica (o ionica)  $\alpha_a$  per completare gli effetti della deformazione. Tale polarizzabilità sarà da aggiungere a quella elettronica e, nelle situazioni più comuni, sarà circa di un ordine di grandezza inferiore ( $\alpha_a \simeq 0.1\alpha_e$ ). Infine un'ulteriore termine aggiuntivo sarà dovuto alla cosiddetta polarizzabilità da orientamento.

Tenendo conto infine di modelli che collegano i momenti di dipolo

microscopici medi al vettore densità di polarizzazione, e il campo efficace al campo esterno applicato al materiale si riescono a comparare le misure macroscopiche effettuate sulla suscettività elettrica con le misure microscopiche sulle polarizzabilità come verifica modelli stessi dei meccanismi della polarizzazione.

## 8 Modello per l'interazione dei campi con la materia attraverso il meccanismo dell'orientamento: polarizzazione elettrica, paramagnetismo, ferromagnetismo

E' dato un momento microscopico  $\mu$  ( $\mu \rightarrow p$  = momento elettrico atomico nella polarizzazione elettrica per orientamento,  $\mu \rightarrow m$  per il paramagnetismo e il ferromagnetismo) che interagisce con un campo  $A$  ( $A \rightarrow E$  nel caso elettrico,  $A \rightarrow H$  nel paramagnetismo,  $A \rightarrow H + \lambda M$  per il ferromagnetismo).

Applicando un campo  $A$  l'energia di interazione del momento  $\mu$  avente un angolo  $\theta$  con tale campo sarà  $U = -\mu \cdot A = -\mu A \cos \theta$ . Al livello globale per tutto il materiale bisogna considerare la distribuzione della media delle possibili orientazioni, di un generico atomo, rispetto al campo esterno nell'elemento di angolo solido  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$ . Tale media  $\langle \cos \theta \rangle$  è effettuata utilizzando la distribuzione di Boltzmann all'equilibrio che contiene un fattore esponenziale del rapporto tra l'energia di interazione  $U$  e l'energia termica  $k_B T$ :

$$\langle \cos \theta \rangle = \frac{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta \cos \theta e^{-\frac{U}{k_B T}}}{\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-\frac{U}{k_B T}}} = L(a) = \coth a - \frac{1}{a} \quad (30)$$

dove  $L(a)$  è detta funzione di Langevin e il parametro  $a$  è il rapporto tra l'energia di interazione massima e l'energia termica  $a = \mu A / (k_B T)$ . In figura è indicato l'andamento di  $L(a)$ , per valori grandi di  $a$ , cioè per campi intensi e temperature molto basse,  $L(a) = \langle \cos \theta \rangle$  tende asintoticamente a 1, cioè un completo allineamento dei momenti nella direzione del campo. Nella maggior parte dei casi comunque se i campi non sono troppo intensi e le temperature troppo basse (piccoli valori di  $a$ ), lo sviluppo in serie della funzione di Langevin mostra un andamento lineare secondo la ret-

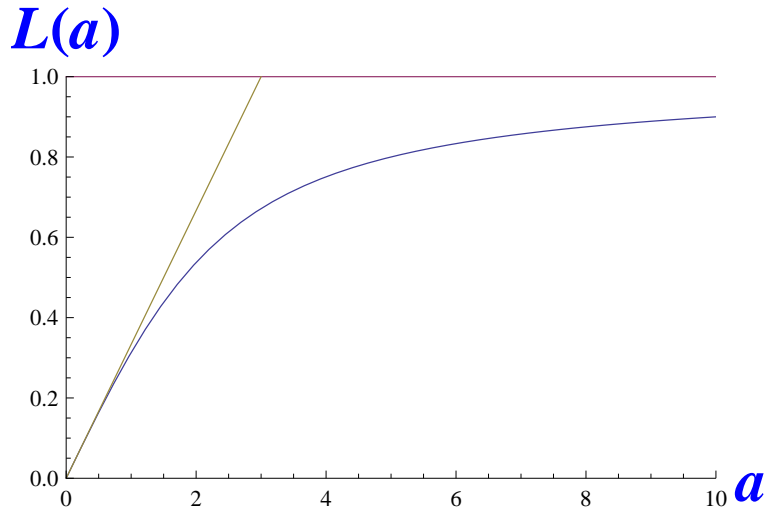


Figura 2: Funzione di Langevin  $L(a)$ , asintoto  $L(a) = 1$ , retta  $a/3$

ta  $a/3$ . Consideriamo ora quest'ultimo più frequente caso, per i tre fenomeni trattati:

## 8.1 Polarizzazione elettrica per orientamento

Nel caso della polarizzazione elettrica per orientamento il momento di dipolo atomico è  $p$  e il campo è  $E$ , il modulo del vettore di polarizzazione sarà dato dal numero di atomi per unità di volume  $N$  per il momento medio per particella allineato nella direzione del campo  $\bar{\varphi} \equiv p \langle \cos \theta \rangle$ . Per cui

$$P = Np \langle \cos \theta \rangle = N \frac{p^2 E}{3k_B T} \quad (31)$$

Il rapporto tra  $\bar{\varphi}$  e il campo stesso, è la polarizzabilità per orientamento  $\alpha_o$  che risulta quindi essere inversamente proporzionale alla temperatura  $T$

$$\alpha_o = \frac{p^2}{3k_B T}. \quad (32)$$

## 8.2 Paramagnetismo

Nel caso del paramagnetismo il modulo del vettore densità di magnetizzazione  $M$  sarà dato da

$$M = Nm \langle \cos \theta \rangle = N \frac{m^2 B}{3k_B T}. \quad (33)$$

Ricordando che per mezzi materiali magneticamente isotropi  $\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$  si ottiene l'espressione per la suscettività magnetica  $\chi_m$

$$\chi_m = \frac{Nm \langle \cos \theta \rangle}{H} = N \frac{m^2 B}{3k_B T H} = N \frac{\mu_0 m^2}{3k_B T} \quad (34)$$

dove  $\mu_0$  è la permeabilità magnetica del vuoto. Questo modello rende conto della legge empirica di Curie  $\chi_m = C/T$  dove  $C$  è una costante sperimentale.

## 8.3 Ferromagnetismo

Le sostanze ferromagnetiche si comportano come quelle paramagnetiche se hanno una temperatura superiore ad un valore  $T_C$ , detto temperatura di Curie. Questo vuol dire che posseggono momento magnetico proprio che tende ad orientarsi lungo il campo. Al di sotto di tale temperatura però si sovrappongono meccanismi di allineamento particolari tali da amplificare enormemente il campo magnetico e anche da ottenere in alcuni casi una magnetizzazione permanente anche in assenza di campo magnetico esterno (isteresi).

Tali meccanismi rientrano nella cosiddetta ipotesi di Weiss: Il materiale ferromagnetico può essere considerato costituito da un insieme di regioni (domini di Weiss) spontaneamente magnetizzate anche se, in genere, le direzioni di tali magnetizzazioni, per ciascun dominio, sono casuali; all'interno di ciascun dominio invece esiste un forte allineamento tra i dipoli magnetici dovuto ad una intensa mutua interazione. Si può quindi considerare che ciascun dipolo all'interno di un dominio risenta di un campo magnetico locale  $\mathbf{B}_\ell$  costituito dal campo applicato all'esterno  $\mathbf{H}$  aggiunto a un contributo, creato dagli altri dipoli del dominio, che può essere ipotizzato proporzionale alla magnetizzazione stessa  $\lambda \mathbf{M}$ , per cui

$$\mathbf{B}_\ell = \mu_0 (\mathbf{H} + \lambda \mathbf{M}) \quad (35)$$

Tale campo modificato è quello da utilizzare nella teoria dell'orientamento di Langevin per la quale, dato un momento magnetico  $m$  per ciascuno degli  $N$  atomi per unità di volume, allora il modulo della magnetizzazione  $M$  sarà

$$M = Nm \langle \cos \theta \rangle = NmL(a) \quad (36)$$

con

$$a = \frac{mB_\ell}{k_B T} = \frac{\mu_0(\mathbf{H} + \lambda\mathbf{M})}{k_B T} \quad (37)$$

Anche in caso di campo esterno nullo si può avere una magnetizzazione spontanea

$$M = \frac{k_B T}{m\mu_0\lambda} a \quad (38)$$

tale formula può essere combinata (per i dettagli del metodo grafico vedere sul libro Fisica par. 18.24) con la (36) eliminando il parametro  $a$  e ottenendo l'andamento della magnetizzazione in funzione della temperatura dal quale si vede che al di sopra della temperatura di Curie non esiste uno stato stabile di magnetizzazione spontanea. Per piccoli valori di  $a$ , tali che  $L(a) \approx a/3$ , allora dalla (36)  $a = 3M/(Nm)$  che, sostituita nella formula della magnetizzazione spontanea (38), individua la temperatura di Curie

$$T_C = \frac{\lambda\mu_0 Nm^2}{3k_B}. \quad (39)$$

Sostituendo il parametro  $a$  ricavato dalla (37), nella (36) (con l'approssimazione  $L(a) \approx a/3$ ) e tenendo conto della (39) si ottiene l'espressione della suscettività ferromagnetica  $\chi_f$  da confrontarsi con i valori sperimentali:

$$\chi_f = \frac{M}{H} = \frac{C}{T - T_C} \quad (40)$$

con la costante  $C = Nm^2\mu_0/(3k_B)$ .

## 9 Vettore di Poynting

Consideriamo un volume  $\tau$  di spazio in cui sia presente un campo magnetico  $\mathbf{E}$  e una densità di corrente  $\mathbf{J}$ , esprimendo la potenza dissipata per effetto Joule  $P = VI$  in funzione del campo elettrico e della densità di corrente si trova che la potenza per unità di volume

è  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$  dove il prodotto scalare tiene conto del fatto che solo la componente del campo elettrico nella direzione della corrente compie lavoro. La potenza dissipata nell'intero volume  $\tau$  sarà allora

$$\int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau. \quad (41)$$

Dalla quarta equazione di Maxwell nel vuoto,  $\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{B}/\mu_0 - \epsilon_0 \partial \mathbf{E}/\partial t$  per cui

$$\int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau = \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \frac{\nabla \times \mathbf{B}}{\mu_0} d\tau - \epsilon_0 \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (42)$$

Introduciamo un vettore detto vettore di Poynting dato dall'espressione  $\mathbf{N} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/\mu_0$ . La divergenza di questo vettore sarà data dall'identità vettoriale  $\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})/\mu_0 \equiv \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})/\mu_0 - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})/\mu_0$  il cui ultimo termine a destra può essere sostituito nella (42) che diventa

$$\int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau = - \int_{\tau} \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\mu_0} d\tau + \int_{\tau} \frac{\mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E})}{\mu_0} d\tau - \epsilon_0 \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (43)$$

Infine dalla terza equazione di Maxwell si sostituisce  $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t$

$$\int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau = - \int_{\tau} \frac{\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})}{\mu_0} d\tau - \frac{1}{\mu_0} \int_{\tau} \mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\tau - \epsilon_0 \int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (44)$$

quindi, applicando il teorema della divergenza al primo termine sulla destra e identificando gli altri termini come le derivate temporali dei quadrati dei campi elettrico e magnetico, si ha

$$\int_{\tau} \mathbf{E} \cdot \mathbf{J} d\tau = - \oint_{S_{\tau}} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} - \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau} u_{em} d\tau. \quad (45)$$

Questa equazione ci dice che, la potenza istantanea, cioè la derivata rispetto al tempo dell'energia elettrica nel volume  $\tau$  è data dalla somma di due contributi: uno è il flusso del vettore di Poynting  $\mathbf{N}$  attraverso la superficie che racchiude il volume, cioè l'energia che fluisce dal (o nel) volume attraverso una superficie unitaria nel tempo unitario, l'altro è la variazione nel tempo dell'energia elettromagnetica contenuta nel volume essendo  $u_{em} = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/(2\mu_0)$  la densità di energia elettromagnetica.