UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2013/14 – Ing. Aerospaziale (Prova scritta del 13 giugno 2014)

Esame di Fisica II ((esercizi 1,2,3,4: 6 punti ciascuno; quesiti a,b: 3 punti ciascuno)**Esame di Elettromagnetismo** (esercizi 1,2,3: 6 punti ciascuno; quesiti a,b,c: 4 punti ciascuno)

Esercizio 1

Due sfere conduttrici di raggio R_1=1cm e R_2=3cm sono poste con i centri ad una distanza L=2m. Inizialmente entrambe hanno una carica $Q_0=2*10^{-3}$C.

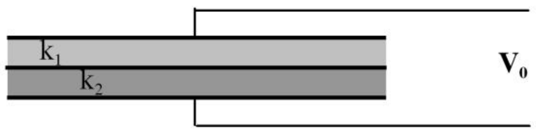
1. Calcolare la forza esercitata su una carica puntiforme $q_0=-2*10^{-6}$C posta ad una distanza 2L dal centro della seconda sfera (vedi figura).
2. La carica q_o viene portata all'infinito, quale è stato il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche?

In seguito le due sfere vengono connesse con un filo conduttore.

3. Quali sono le cariche Q_1 e Q_2 che si misurano sulle due sfere?
4. Quale è l'energia dissipata nel processo?

Esercizio 2

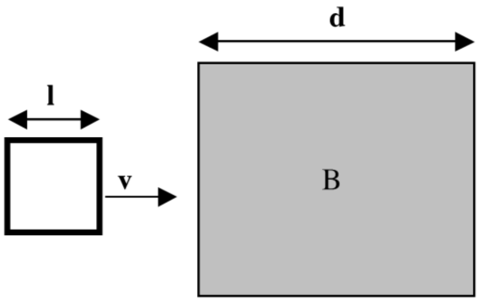
Tre lamine metalliche quadrate parallele, di lato L=120cm, sono poste a distanza h=1.1 cm una dall'altra. Tra le lamine vi sono due sostanze dielettriche, con costanti dielettriche relative k_1=2.1 e k_2=1.7. Le due lamine esterne sono connesse ad un generatore che le mantiene alla tensione V_0=120V. Determinare:



1. Quale è la capacità totale del sistema.
2. Quanto vale il campo elettrico E_1 nel dielettrico 1.
3. Quale è la variazione di energia elettrostatica se i due dielettrici vengono estratti.

Esercizio 3

Una spira quadrata rigida, di lato l = 12 cm e resistenza R = 25 Ohm, viene trascinata con velocità orizzontale, che rimane sempre costante, v=3 m/s. L spira entra in una zona di larghezza d>l in cui vi è un campo magnetico B = 4.5 T, ortogonale alla spira ed entrante nel piano del disegno.



Determinare:

1. Il verso della corrente indotta nella spira nelle varie fasi del moto.
2. In quali regioni agisce una forza sulla spira, il suo verso ed intensità.
3. L'energia totale dissipata nella resistenza dopo che la spira è completamente uscita dalla zona con campo magnetico.
4. Quale è la carica che globalmente ha fluito lungo la spira.

Esercizio 4

Un satellite artificiale, dotato di pannelli fotovoltaici per l'alimentazione della strumentazione, orbita attorno al sole nei pressi di Venere. Sapendo che:

- l'intensità della luce solare sulla terra è pari a $1.4*10^3 W/m^2$
- la distanza Sole-Terra è di $150*10^9$m
- la distanza Sole-Venere è di $108*10^9$m

Determinare:

1. La superficie minima che devono avere i pannelli fotovoltaici per fornire i 200W necessari all'alimentazione, supponendo che i pannelli siano disposti ortogonalmente alla radiazione, che tutta la radiazione venga assorbita e che il 10% sia convertita in elettricità.
2. L'ampiezza del campo magnetico della radiazione sui pannelli.
3. La forza dovuta alla radiazione sui pannelli, se questi hanno in realtà una superficie, più ampia del minimo necessario, di $2m^2$

a) Dimostrare l'equivalenza tra i calcoli dell'energia di una sfera conduttrice di raggio R, tramite l'espressione della sua capacità C e tramite l'espressione della densità di energia del campo elettrico E
b) Illustrare con un esempio l'azione della forza magnetica su un circuito percorso da corrente
c) Ricavare l'espressione per l'energia di un induttore e per la densità di energia del campo magnetico

SOLUZIONI

1)

La forza sulla carica q_0 è pari a q_0E, dove E è il campo elettrico generato dalle due sfere cariche, valutato nel punto in cui si trova q_0. Le sfere sono distanti rispetto alle loro dimensioni, quindi trascuriamogli effetti di induzione reciproca (e a maggior ragione l'effetto di induzione di q_0). Le distribuzioni di carica si considerano uniformi sulle superfici. Ciascuna delle sfere uniformemente cariche genera un campo che è equivalente a quello di una carica puntiforme posta nel loro centro, quindi, nel punto in cui si trova q_0:

$$E_1 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 (3L)^2} \qquad E_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 (2L)^2} \tag{1.1}$$

$$F = q_0\left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 (2L)^2} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 (3L)^2}\right) = \frac{q_0Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{4L^2} + \frac{1}{9L^2}\right) = -3.25N\vec{u}_x \tag{1.2}$$

Il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche per portare la carica q_0 all'infinito è pari a q_0V, dove V è il potenziale nella posizione iniziale dalla carica q_0, generato delle due sfere cariche (equivalente a quello di due cariche puntiformi), e si considera 0 il potenziale all'infinito:

$$W = q_0V = q_0\left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 2L} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0 3L}\right) = \frac{q_0Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{2L} + \frac{1}{3L}\right) = -15J \tag{1.3}$$

Quando le due sfere vengono connesse elettricamente, la loro carica si ridistribuisce, sempre sulle superfici, in modo che le due sfere si portino allo stesso potenziale. Sempre a causa della distanza tra le sfere, la distribuzione di carica su ciascuna sfera potrà ancora essere considerata uniforme. Si avrà quindi che, calcolando il potenziale sulle superfici delle sfere:

$$\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} \tag{1.4}$$

e quindi, considerando anche la conservazione della carica, le equazioni che determinano le cariche sono:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R_1}{R_2} \qquad Q_1 + Q_2 = 2Q_0 \tag{1.5}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{gathered} Q_2 = \frac{2Q_0}{1+\frac{R_1}{R_2}} = 3\cdot10^{-3}C \\ Q_1 = 2Q_0 - Q_2 = 1\cdot10^{-3}C \end{gathered} \tag{1.6}$$

L'energia dissipata nel processo sarà pari alla variazione dell'energia elettrostatica del sistema. Ciascuna sfera carica può essere considerata come un condensatore (con l'altra armatura all'infinito), di capacità pari a $4\pi\varepsilon_0 R$ e quindi di energia $Q^2/2C$. Si ottiene lo ovviamente stesso risultato integrando la densità di energia elettrostatica nel volume in cui c'è campo elettrico:

$$U_E = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \int_R^\infty \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\right)^2 4\pi R^2 dR = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{1.7}$$

L'energia elettrostatica iniziale è così:

$$U_{IN} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 2.4\cdot10^6 J \tag{1.8}$$

e quella finale:

$$U_{FIN} = \frac{1}{2}\frac{Q_1^2}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \frac{1}{2}\frac{Q_2^2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2}\right) = 1.8\cdot10^6 J \tag{1.9}$$

da cui $U_{DISS} = \left|U_{FIN} - U_{IN}\right| = 600KJ$.

2)

Le due capacità C1 e C2 si possono considerare in serie. Hanno valori diversi a causa delle diverse costanti dielettriche:

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 k_1 L}{h} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 2.1 \cdot 1.2^2}{0.011} = 2.433nF$$
$$C_2 = \frac{\varepsilon_0 k_2 L}{h} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1.7 \cdot 1.2^2}{0.011} = 1.97nF \qquad (7.1)$$
$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} = 1.089nF$$

Le due capacità in serie hanno la stessa carica Q, che è anche la carica della serie dei due. Questo fatto può essere usato per calcolare le tensioni su ciascun condensatore e quindi i campi elettrici:

$$Q = CV = 1.098 \cdot 10^{-9} \cdot 120 = 1.307 \cdot 10^{-7} C$$
$$V_1 = \frac{Q}{C_1} = \frac{1.307 \cdot 10^{-7} C}{2.433 \cdot 10^{-9}} = 53.7V \qquad (7.2)$$
$$E_1 = \frac{V_1}{h} = 4.88KV / m$$

L'energia elettrostatica iniziale vale:

$$U_I = \frac{1}{2} C_I V^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.089 \cdot 10^{-9} \cdot 120^2 = 7.841 \cdot 10^{-6} J \qquad (7.3)$$

Togliendo i dielettrici varia la capacità del sistema, mentre il generatore mantiene la tensione costante, e quindi varia l'energia accumulata:

$$C_F = \frac{\varepsilon_0 L^2}{2h} = \frac{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 1.2^2}{0.022} = 0.579nF$$
$$U_F = \frac{1}{2} C_F V^2 = \frac{1}{2} \cdot 0.58 \cdot 10^{-9} \cdot 120^2 = 4.171 \cdot 10^{-6} J$$
$$\Delta U = U_F - U_I = -3.67 \cdot 10^{-6} J$$

3)

La corrente indotta dovrà generare un campo magnetico opposto a quello dato quando la spira sta entrando (per opporsi all'aumento di flusso) e di verso opposto quando la spira esce. Quindi il verso è antiorario prima e orario poi, la corrente indotta vale:

$$i = \frac{Blv}{R} \qquad (19.1)$$

La forza agisce quando la spira entra ed esce, sempre opposta alla velocità:

$$\vec{F} = -\frac{B^2 l^2 v}{R} \vec{u}_v = 35mN \qquad (19.2)$$

L'energia dissipata è uguale al lavoro fatto dalle forze esterne che bilanciano la forza (19.2) per mantenere costante la velocità:

$$W = -2\vec{F} \cdot \vec{l} = 2\frac{B^2 l^2 v}{R} l = 8.4mJ \qquad (19.3)$$

Il flusso di B iniziale e finale sono nulli (spira fuori dal campo magnetico) e perciò, secondo la legge di Felici, l'integrale della carica è uguale a 0.

4)

L'intensità della radiazione solare varia con il quadrato della distanza dal sole. Su Venere vale pertanto:

$$I_V = I_T \cdot \left(\frac{R_T}{R_V}\right)^2 = 1.4 \cdot 10^3 \cdot \left(\frac{150}{108}\right)^2 = 2.7 \cdot 10^3 W / m^2 \qquad (33.1)$$

Per ottenere una potenza elettrica di 200W, data l'intensità, l'efficienza e la superficie dei pannelli, si scriverà:

$$P = I_V \cdot Eff \cdot \Sigma \qquad (33.2)$$

e quindi:

$$\Sigma = \frac{P}{I_V \cdot Eff} = \frac{200}{2.7 \cdot 10^3 \cdot 0.1} = 0.74 m^2 \qquad (33.3)$$

L'ampiezza del campo magnetico si ricava immediatamente nota l'intensità della radiazione:

$$\begin{aligned} I_V &= \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 \rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{2I}{\varepsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2.7 \cdot 10^3}{8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 3 \cdot 10^8}} = 1426 V / m \\ B_0 &= \frac{E_0}{c} = 4.75 \cdot 10^{-6} T \end{aligned} \qquad (33.4)$$

Infine la forza sui pannelli (che sono sovradimensionati rispetto alla superficie minima sopra calcolata) si determina in base alla pressione di radiazione. Nota che tutta la radiazione è assorbita, anche se solo il 10% trasformata in elettricità:

$$F = \frac{I_V}{c}\Sigma' = \frac{2.7 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^8} \cdot 2 = 18 \cdot 10^{-6} N \qquad (33.5)$$