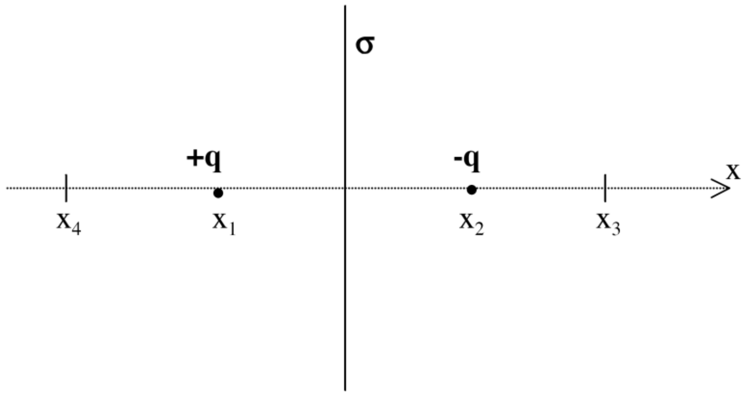
UNIVERSITA' DEGLI STUDI di ROMA "LA SAPIENZA"
Anno Accademico 2013/14 – Ing. Aerospaziale (Prova scritta del 12 settembre 2014)

Esame di Fisica II ((esercizi 1,2,3,4: 6 punti ciascuno; quesiti a,b: 3 punti ciascuno)**Esame di Elettromagnetismo** (esercizi 1,2,3: 6 punti ciascuno; quesiti a,b,c: 4 punti ciascuno)

1)

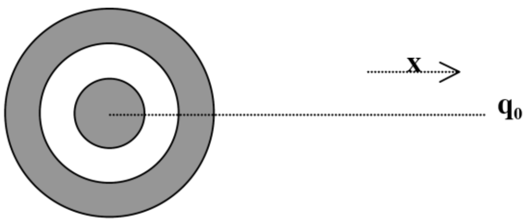
Due cariche puntiformi $q_1 = +q$ e $q_2 = -q$ sono poste rispettivamente a $x_1 = -1m$ e $x_2 = 1m$. Sul piano $x = 0$ (piano yz) è presente una densità di carica uniforme σ. Sapendo che $q = 10^{-3}C$ e che $\vec{E}(x_3 = 2m, 0, 0) = 0$ calcolare:

1. La densità di carica σ
2. Il lavoro fatto dalle forze elettrostatiche per portare una carica $q_0 = 10^{-4}C$ da x_3 alla parte opposta $x_4 = -x_3$



2)

Un conduttore sferico cavo di raggio interno R_2=2cm e raggio esterno R_3=3cm ha una carica pari a Q_0=3*10^{-4}C. All'interno viene posto un conduttore sferico di raggio R_1=1cm, con un'ulteriore carica pari a Q_0. Ad una distanza L=3m dal centro dei conduttori è posta una piccola carica puntiforme q_0=-2*10^{-7}C.



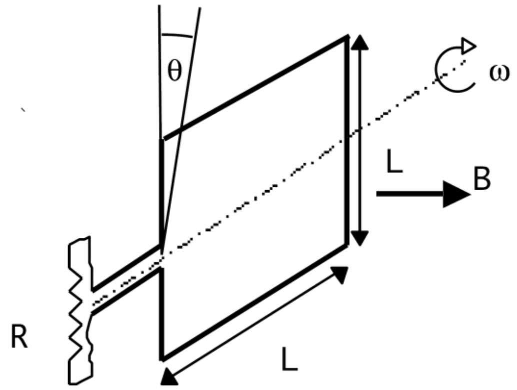
1. Calcolare la forza esercitata sulla carica q_0
2. La carica q_o viene portata all'infinito, quale è stato il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche?

In seguito i due conduttori vengono connessi con un filo metallico.

3. Quali sono le cariche Q_1 e Q_2 che si misurano alla fine sulle sfere?
4. Quale è l'energia dissipata nel processo?

3)

Una spira di forma quadrata di lato L=1m ruota attorno ad un asse orizzontale con una velocità angolare $\omega = 2\pi$ rad/sec (vedi figura). La spira è immersa in un campo magnetico uniforme B=2Tesla diretto lungo l'asse z, ortogonale all'asse della spira. La spira, di resistenza trascurabile è connessa ad una resistenza di carico R=0.2 Ω.



Calcolare:

1. La corrente che circola nella spira in funzione del tempo.
2. Il momento massimo che agisce sulla spira.
3. L'energia dissipata sulla resistenza in 10 secondi.

4)

Un'antenna emette isotropicamente con una potenza pari a 15W, con una frequenza di 27MHz.

1. A quale distanza si misura un'ampiezza del campo elettrico pari a E_0=10mV/m

a) Ricavare l'andamento temporale della carica e scarica di un condensatore

b) Definire il campo **H** il vettore magnetizzazione **M** e come intervengono nelle equazioni di Maxwell

c) Definire il vettore di Poynting **P** ricavandolo utilizzando le equazioni di Maxwell

SOLUZIONI

1)

Il campo elettrico nel punto x_3 è la soma dei campi generati dalle due cariche e di quello della distribuzione piana:

$$E(x_3) = \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_2}{(x_3 - x_2)^2} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \right) \vec{u}_x = 0 \qquad (4.1)$$

da cui si ricava la densità di carica incognita:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(2+1)^2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{(2-1)^2} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \\
&\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{9} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{8}{9} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = 0 \\
&\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{8}{9} \\
&\sigma = \frac{4q}{9\pi} = 141.5 \cdot 10^{-6}\, C/m^2
\end{aligned} \qquad (4.2)$$

Nel calcolare il lavoro, si può trascurare quello fatto dal campo generato dalla carica piana per simmetria, si considerano quindi solo le differenze di potenziale delle due cariche puntiformi:

$$\begin{aligned}
&W = -q_0 \Delta V = q_0 (V_{IN} - V_{FIN}) \\
&V_{IN} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-q}{2-1} + \frac{q}{2+1} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(-q + \frac{q}{3} \right) \\
&V_{FIN} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-q}{2+1} + \frac{q}{2-1} \right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-q}{3} + q \right) \\
&W = q_0 (V_{IN} - V_{FIN}) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(-q + \frac{q}{3} + \frac{q}{3} - q \right) \\
&W = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(-2q + \frac{2}{3} q \right) = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} \left(-\frac{4}{3} q \right) = -\frac{q_0 q}{3\pi\varepsilon_0} = -1.2 \cdot 10^3 J
\end{aligned}$$

2)

La carica sulle superfici di raggio R_1,R_2 ed R_3 è rispettivamente Q_0, -Q_0 (indotta) e 2Q_0 (composta da Q_0 indotta più Q_0 nativa). La distanza tra q_0 ed i conduttori è grande rispetto al loro diametro, e q_0 è piccola rispetto a Q_0. L'effetto di induzione elettrostatica è perciò trascurabile e le distribuzioni di carica sui conduttori possono considerarsi in buona approssimazione sferiche uniformi. La carica q_0 vedrà il campo generato da una superficie sferica carica con carica 2 Q_0, equivalente a quello di una carica puntiforme:

$$F = q_0 \left(\frac{2Q_0}{4\pi\varepsilon_0 L^2} \right) = -120 mN\vec{u}_x \qquad (2.1)$$

Il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche per portare la carica q_0 all'infinito è pari a $q_0 (V_{IN} - V_{FIN})$ da cui, considerando il potenziale nullo all'infinito:

$$W = q_0 \left(\frac{2Q_0}{4\pi\varepsilon_0 L} \right) = -360 mJ \qquad (2.2)$$

Connettendo le due sfere, la carica si ridistribuisce portandosi tutta sulla superficie esterna (quella di raggio R_3). Quindi le cariche finali sulle due sfere saranno:

$$\begin{aligned}
&Q_1 = 0 \\
&Q_2 = 2Q_0 = 6 \cdot 10^{-4} C
\end{aligned} \qquad (2.3)$$

L'energia elettrostatica del sistema è costituita dall'energia del condensatore sferico $Q^2/2C$ (tra le due sfere interna ed esterna) e dall'energia del campo esterno. La capacità di un condensatore sferico è pari a:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)^{-1} \tag{2.4}$$

Poiché il campo elettrico esterno non varia cortocircuitando le due sfere, l'unica variazione è quella relativa al campo interno:

$$\begin{gathered} U_{IN} = \frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \qquad \mathrm{U_{FIN}} = 0 \\ U_{DISS} = \left|\frac{1}{2}\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right| = 20.25KJ \end{gathered} \tag{2.5}$$

3)

Il flusso di B attraverso la spira è $\Phi(B) = BL^2\cos(\alpha) = BL^2\cos(\omega t)$. La corrente indotta è pertanto:

$$i = \frac{FEM}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi(B)}{\partial t} = \frac{\omega Bl^2 sen\omega t}{R} = 62.83\cdot sen\left(2\pi t\right) \tag{22.1}$$

Ricordiamo che il lavoro fatto dal momento che agisce sulla spira è $dW = Md\vartheta$, e quindi la potenza spesa è pari a $M\dfrac{d\vartheta}{dt} = M\omega$. Poiché la potenza si ritrova in potenza elettrica (spesa sulla resistenza) si scriverà:

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{Ri^2}{\omega} = \frac{\omega B^2 l^4 sen^2\omega t}{R} \qquad M_{\max} = \frac{\omega B^2 l^4}{R} = 125.6Nm \tag{22.2}$$

Si ottiene lo stesso risultato ricordando che il momento su una spira si può scrivere $\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B}$ dove per una spira piana $\vec{m} = i\Sigma\vec{u}_N$.

L'energia dissipata è l'integrale della potenza nei 10 secondi. L'integrale di $sen^2(\omega t)$ in un periodo è pari a T/2, e poiché il periodo di rotazione della spira è di un secondo vale:

$$W = \int_0^{10} Ri^2 dt = \frac{\omega^2 B^2 l^4}{R}\int_0^{10} sen^2\left(\omega t\right)dt = \frac{\omega^2 B^2 l^4}{R}\cdot 5 = 3.95KJ \tag{22.3}$$

4)

L'intensità dell'onda EM generata dalla trasmittente diminuisce col quadrato della distanza. Quindi nota la potenza si calcola l'intensità in funzione della distanza, e quindi l'ampiezza dell'onda armonica emessa in funzione della distanza.

$$\begin{aligned} & I\cdot 4\pi r^2 = P \rightarrow I = \frac{P}{4\pi r^2} \\ & I = \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 = \varepsilon_0 c E_{Eff}^2 \\ & \frac{1}{2}\varepsilon_0 c E_0^2 = \frac{P}{4\pi r^2} \rightarrow r = \frac{1}{E_0}\sqrt{\frac{P}{2\pi\varepsilon_0 c}} \\ & r = \frac{1}{10\cdot 10^{-3}}\sqrt{\frac{15}{2\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 3\cdot 10^{8}}} = 3km \end{aligned} \tag{36.1}$$