FISICA

A.A. 2018-2019

Ingegneria Gestionale

Soluzioni Esonero del 3 Maggio 2019

1-A-C. Un ragazzo lancia una palla di m=100 g con una velocità iniziale di 15 m/s e con un angolo di elevazione di 30°. Nel momento in cui la palla si trova alla quota massima una folata di vento imprime alla palla una forza orizzontale costante opposta al moto in modo che la palla ricada nel punto di partenza. Si determini il valore della forza impressa dalla folata ed il tempo complessivo di volo.

Soluzione 1-A-C.

Equazioni della cinematica prima della folata di vento

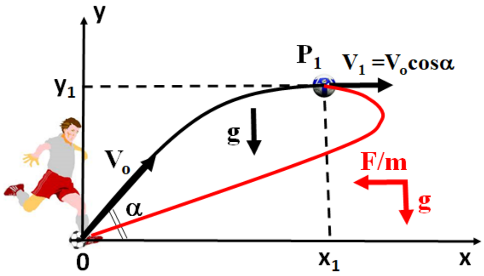
Lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = v_o \cos(\alpha)\cdot t \\ v_x(t) = v_o \cos(\alpha) \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = v_o \sin(\alpha)\cdot t - g\cdot t^2/2 \\ v_y(t) = v_o \sin(\alpha) - g\cdot t \\ a_y = -g \end{cases}$

Quando la palla raggiunge l'apice la componente verticale della velocità si annulla $\mathbf{v_y=0}$ da cui si ricava il **tempo di volo** $t_1 = v_o \sin(\alpha)/g =$ **0.765 s**

Con questo dato si possono quindi ricavare la grandezze cinematiche immediatamente prima che il vento imprima la forza F

Le coordinate della palla $\mathbf{P_1}$ sono quindi

$$\begin{cases} x_1 = x(t_1) = v_o t_1 \cos\alpha = \dfrac{v_o^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = 9.94m \\ y_1 = y(t_1) = v_o t_1 \sin\alpha - \dfrac{1}{2} g t_1^2 = \dfrac{v_o^2 \sin^2\alpha}{2g} = 2.87m \end{cases}$$



con la relativa velocità $\mathbf{v_1}$ scomposta come segue $\begin{cases} v_{1,x} = v_o \cos\alpha = 13.0m/s \\ v_{1,y} = 0 \end{cases}$

Equazioni della cinematica durante la folata di vento

Facendo ripartire il cronometro dal momento in cui il vento comincia ad imprimere una forza F orizzontale (t=0), in cui la palla si trova in $\mathbf{P_1=(x_1,y_1)}$ con velocità orizzontale $\mathbf{v_1}=v_o\cos\alpha$ le equazioni della cinematica divengono

Lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = x_1 + v_{1,x}\cdot t - (F/m)\cdot t^2/2 \\ v_x(t) = v_{1,x} - (F/m)\cdot t \\ a_x = -F/m \end{cases}$, e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = y_1 - g\cdot t^2/2 \\ v_y(t) = -g\cdot t \\ a_y = -g \end{cases}$

La palla tocca terra quando $y(t_2)=0$ dopo un tempo $t_2 = \sqrt{\dfrac{2y_1}{g}} = \sqrt{\dfrac{2(v_o^2\sin^2\alpha/2g)}{g}} = \dfrac{v_o \sin\alpha}{g} = t_1$

che è quindi uguale al tempo di salita durante la prima fase ($t_2=t_1=$ **0.765 s)** per un **tempo complessivo di volo** di **1.53 s**

Condizione per la ricaduta nel punto di partenza

Quando la palla tocca terra la forza del vento deve aver riportato la palla nell'origine per cui si deve imporre la condizione $x(t_2)=0$

$x(t_2) = x_1 + v_{1,x} \cdot t_2 - (F/m) \cdot t_2^2/2 = 0$ da cui si ricava la **forza del vento** F

$$F = \frac{2m}{t_2^2}(x_1 + v_{1,x} \cdot t_2) = \frac{2m}{\left(\frac{v_o^2 \sin^2\alpha}{g^2}\right)}\left(\frac{2v_o^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g}\right) = \frac{4mg}{tg\alpha} = \mathbf{6.79\ N}$$

1-B-D. Durante un test due autovetture vengono lanciate alla medesima velocità di v_o=180 km/h e sottoposte a due differenti tipi di frenata. La prima auto viene decelerata uniformemente dall'istante t=0 con accelerazione negativa di valore assoluto a_1=5m/s^2 fino a fermarsi completamente dopo un tempo Δt. La seconda auto viene invece sottoposta ad una frenata progressiva che vale sempre dall'istante t=0, che realizza una decelerazione variabile con legge $a_2(t) = \frac{a_1 \cdot t}{T}$ per t<T=5s , e $a_2 = a_1$ per t≥T. Determinare, nello stesso momento in cui la prima macchina si ferma, la velocità residua posseduta dalla seconda auto ed il relativo spazio percorso. Determinare il tempo richiesto per arrestare completamente la seconda auto e lo spazio percorso.

Soluzione 1-B-D.
In un qualunque problema di cinematica una volta nota l'accelerazione a(t) in funzione del tempo, la velocità e lo spazio percorso sono facilmente trovati per successive integrazioni. Quindi per la velocità si ottiene $v(t) - v_o = \int_0^t a(t)dt$ e per lo spazio percorso $s(t) - s_o = \int_0^t v(t)dt$

Cinematica prima auto
In particolare la prima auto è sottoposta ad moto uniformemente decelerato ben descritto dalle eq.

per la **velocità** $v_1(t) - v_o = \int_0^t -a_1 dt$ da cui $v_1(t) = v_o - a_1 t$

e per lo **spazio percorso** $s_1(t) - s_o = \int_0^t (v_o - a_1 t)dt$ da cui $s_1(t) = v_o t - a_1 t^2/2$

La prima auto si arresta dopo un periodo $t_1 = \frac{v_o}{a_1} =$ **10 s,** dopo un percorso $s_1(t_1) = \frac{v_o^2}{2a_1} =$ **250 m**

Cinematica seconda auto
La seconda auto è sottoposta ad moto decelerato ben descritto da $a_2(t) = \begin{cases} -a_1(t/T) & t < T = 5s \\ -a_1 & t \geq T = 5s \end{cases}$.

La **velocità** si ottiene dalla $v_2(t) = v_o + \int_0^t a_2 dt$ che vale nei due range temporali

$$v_2(t) = \begin{cases} v_o + \int_0^t -a_1(t/T)dt & t < T = 5s \\ v_o + \int_0^T -a_1(t/T)dt + \int_T^t -a_1 dt & t \geq T = 5s \end{cases} \quad \text{ossia} \quad v_2(t) = \begin{cases} v_o - a_1 \frac{t^2}{2T} & t < T \\ v_o - a_1\left(t - \frac{T}{2}\right) & t \geq T \end{cases}$$

Nel momento in cui si ferma la prima auto Δt=10s la seconda auto ha ancora **velocità** $v_2(t_1) = v_o - a_1\left(t_1 - \frac{T}{2}\right) =$ **12.5 m/s**

Lo spazio percorso $s_2(t)=\int_0^t v_2 dt=\begin{cases}\int_0^t \left(v_o-a_1\dfrac{t^2}{2T}\right)dt & t<T\\ \int_0^T \left(v_o-a_1\dfrac{t^2}{2T}\right)dt+\int_T^t\left[v_o-a_1\left(t-\dfrac{T}{2}\right)\right]dt & t\geq T\end{cases}$

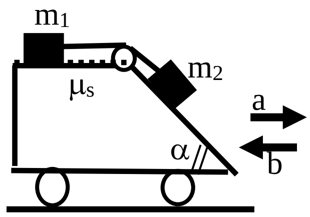
che porta alla formula per t>T $s_2(t)=\left(v_oT-a_1\dfrac{T^2}{6}\right)+\left[v_o(t-T)-a_1\left(\dfrac{t^2-T^2}{2}-\dfrac{T}{2}(t-T)\right)\right]$

e dopo qualche passaggio $s_2(t)=v_ot-a_1\dfrac{3t^2-3tT+T^2}{6}$ che per t_1=10s corrisponde allo **spazio percorso dalla seconda auto** $s_2(t_1)$=**354 m**

Per arrestare completamente la seconda auto è necessario imporre $v_2(t)=v_o-a_1\left(t-\dfrac{T}{2}\right)=\mathbf{0}$

che porta al **tempo di arresto** $t_2=\dfrac{v_0}{a_1}+\dfrac{T}{2}=$ **12.5 s** con uno **spazio percorso complessivo** dalla seconda auto $s_2(t_2)$=**370 m**

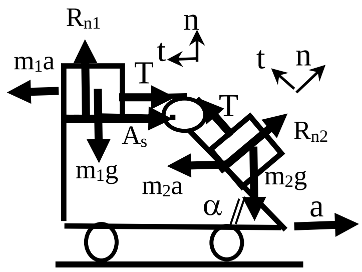
2-A-D. Sul tetto di una macchina è posto un bagaglio di massa m_1=10 kg collegato con una fune con un secondo bagaglio m_2=4 kg che funge da contrappeso sul piano inclinato di un angolo α=60°. Quando la macchina è ferma il sistema è in equilibrio grazie all'attrito di m_1 con il piano orizzontale scabro del tetto (μ_s=0.4). Quando la macchina parte con accelerazione uniforme **a** in avanti il bagaglio rischia di cadere all'indietro. Determinare il valore dell'accelerazione **a** massima ammissibile in partenza. Determinare inoltre anche il valore della decelerazione massima **b** ammissibile in caso di frenata.



Soluzione 2-A-D.
Partenza con accelerazione a

per la massa m_1 $\begin{cases}\hat{n} & R_{n1}-m_1g=0\\ \hat{t} & m_1a-A_s-T=0\end{cases}$

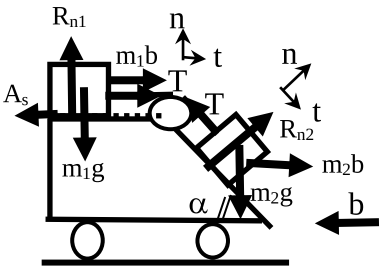
per la massa m_2 $\begin{cases}\hat{n} & R_{n2}-m_2g\cos\alpha-m_2a\sin\alpha=0\\ \hat{t} & T-m_2g\sin\alpha+m_2a\cos\alpha=0\end{cases}$



sommando le equazioni sull'asse tangenziale si ottiene $A_s=m_1a-m_2g\sin\alpha+m_2a\cos\alpha$

con la condizione $A_s\leq\mu_sR_{n1}=\mu_sm_1g$ si ottiene $a\leq g\dfrac{\mu_sm_1+m_2\sin\alpha}{m_1+m_2\cos\alpha}$ = **6.10** m/s^2

Frenata con decelerazione b



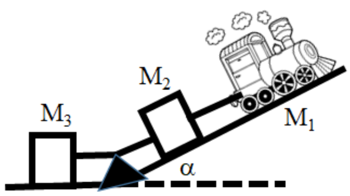
per la massa m_1 $\begin{cases} \hat{n} & R_{n1} - m_1 g = 0 \\ \hat{t} & T + m_1 b - A_s = 0 \end{cases}$

per la massa m_2 $\begin{cases} \hat{n} & R_{n2} - m_2 g\cos\alpha + m_2 b \sin\alpha = 0 \\ \hat{t} & -T + m_2 g \sin\alpha + m_2 b\cos\alpha = 0 \end{cases}$

sommando le equazioni sull'asse tangenziale si ottiene $A_s = m_1 b + m_2 g \sin\alpha + m_2 b\cos\alpha$

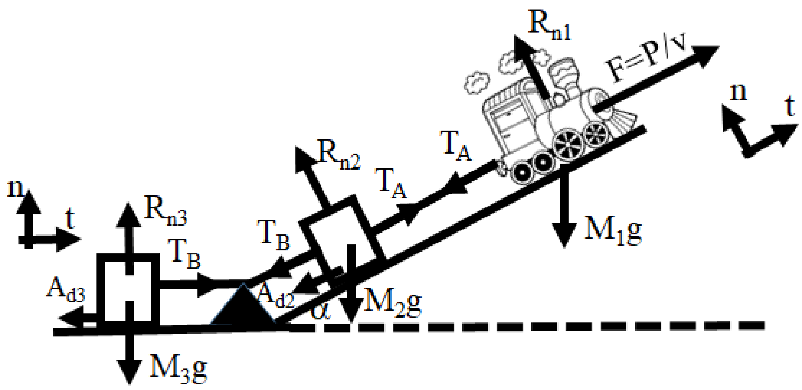
con la condizione $A_s \le \mu_s R_{n1} = \mu_s m_1 g$ si ottiene $b \le g\dfrac{\mu_s m_1 - m_2 \sin\alpha}{m_1 + m_2\cos\alpha}$ = **0.44** m/s^2

2-B-C. Un piccolo locomotore di massa M_1=300 kg sale lungo un piano inclinato di un angolo α =30° rispetto all'orizzontale trascinando con delle funi due blocchi di massa M_2=100 kg ed M_3=200 kg (quest'ultimo viene trascinato lungo un piano orizzontale come in figura). Sapendo che il locomotore procede a velocità costante sviluppando una potenza P=120 kW e che entrambi i blocchi M_2 ed M_3 strisciando subiscono una forza di attrito con il terreno con medesimo coefficiente μ_d=0.3, determinare la velocità del convoglio e la tensione delle due funi. (Si trascuri la resistenza dell'aria)



Soluzione 2-B-C.
Lo studio delle forze deve essere scomposto secondo un asse del moto t ed un asse normale n separatamente per ogni corpo. Sul locomotore viene poi applicata una forza motrice lungo l'asse del moto *F=P/v* che consente di fare procedere il convoglio a velocità costante con accelerazione nulla. Pertanto

massa M_1 ;
$\begin{cases} t) & F - T_A - M_1 g \sin\alpha = 0 \\ n) & R_{n1} = M_1 g\cos\alpha \end{cases}$



massa M_2 ;
$\begin{cases} t) & T_A - T_B - M_2 g \sin\alpha - A_{d2} = 0 \\ n) & R_{n2} = M_2 g\cos\alpha \end{cases}$

massa M_3 ;
$\begin{cases} t) & T_B - A_{d3} = 0 \\ n) & R_{n3} = M_3 g \end{cases}$

sommando tutte le equazioni lungo l'asse del moto $F - A_{d2} - A_{d3} - M_1 g\sin\alpha - M_2 g \sin\alpha = 0$

dove $A_{d2} = \mu_d R_{n2} = \mu_d M_2 g\cos\alpha$ e $A_{d3} = \mu_d R_{n3} = \mu_d M_3 g$

e combinando $\dfrac{P}{v} = g\left[M_1 \sin\alpha + M_2\sin\alpha + \mu_d M_2 \cos\alpha + \mu_d M_3\right]$

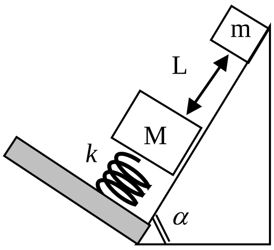
da cui la velocità del convoglio $v = \dfrac{P}{g\left[(M_1 + M_2)\sin\alpha + \mu_d\left(M_2\cos\alpha + M_3\right)\right]}$ **= 42.8 m/s**

Le tensioni si ottengono dalla prima e terza equazione rispettivamente:

$$T_A = \frac{P}{v} - M_1 g \sin\alpha = \mathbf{1333\ N}$$

$$T_B = A_{d3} = \mu_d R_{n3} = \mu_d M_3 g = \mathbf{588\ N}$$

3-A-C. Un blocco di massa M=3 kg è disposto lungo un piano liscio inclinato di un angolo α=60° rispetto all'orizzontale e collegato con una molla di costante elastica k=1000 N/m. Il blocco è inizialmente in quiete frutto dell'equilibrio fra tutte le forze con una leggera compressione della molla da determinare. Un secondo blocco di massa m=1 kg viene lasciato scivolare lungo il piano inclinato urtando il blocco M dopo aver percorso lo spazio L=2m. Essendo l'urto perfettamente anelastico determinare la massima compressione della molla, l'ampiezza ed il periodo delle oscillazioni.



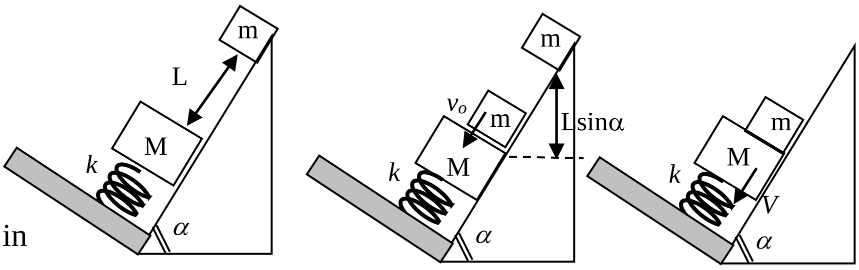
Soluzione 3-A-C

Urto perfettamente anelastico

Il blocco m scende con accelerazione costante lungo il piano inclinato. La velocità di impatto v_o con il blocco fermo si calcola applicando la conservazione dell'energia meccanica. L'energia potenziale U che il blocco ha grazie alla sua altezza Lsinα (calcolata rispetto al punto di impatto), si trasforma in energia cinetica K

$$U = mg(L\sin\alpha) = K = \frac{1}{2}mv_0^2$$

da cui $v_o = \sqrt{2gL\sin\alpha}$ **=5.83 m/s**



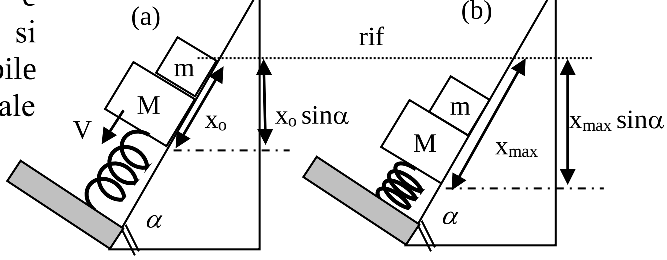
I due blocchi dopo l'urto si fondono in un solo corpo di massa m+M

Dalla conservazione della quantità di moto $mv_o = (m+M)V$

si ottiene la velocità dei blocchi dopo l'urto $V = \dfrac{m}{m+M}v_o = \dfrac{1}{4}v_0 =$ **1.46 m/s**

Calcolo della compressione della molla

Prima di procedere al calcolo della compressione è importante notare che la molla già prima dell'urto si trovava compressa di una quantità $\mathbf{x_o}$ calcolabile imponendo l'equilibrio delle forze lungo l'asse tangenziale



$$Mg\sin\alpha - kx_o = 0 \quad \text{da cui} \quad x_o = \frac{Mg\sin\alpha}{k} = \mathbf{2.5\ cm}$$

Non si confonda questa compressione iniziale per contrastare il peso di M, con la nuova posizione di equilibrio introno alla quale il sistema oscillerà. Questa posizione di equilibrio si ottiene bilanciando forza elastica e componente tangenziale della forza peso per il sistema M+m

$(M+m)g\sin\alpha - kx_{eq} = 0$ da cui $x_{eq} = \dfrac{(M+m)g\sin\alpha}{k} =$ **3.4 cm**

Conservazione energia meccanica nella fase di compressione
Assumendo un nuovo riferimento comune sia per l'energia potenziale che per l'energia elastica quello corrispondente alla posizione a riposo della molla, le due masse si trovano inizialmente sotto il riferimento e quindi ad energia potenziale negativa. L'energia meccanica nello stato (a) vale quindi $E_{ma} = \frac{1}{2}kx_o^2 - (M+m)gx_o\sin\alpha + \frac{1}{2}(M+m)V^2$ **= 3.70 J**

Per la conservazione dell'energia meccanica nello stato (b) dove i due blocchi invertono il moto
$E_{mb} = \frac{1}{2}kx_{\max}^2 - (M+m)gx_{\max}\sin\alpha = E_{ma}$ (Eq di 2° grado risolta con scelta soluzione positiva)

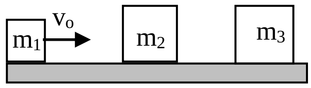
da cui la **compressione massima** $x_{\max} = \dfrac{(M+m)g\sin\alpha}{k} + \sqrt{\left(\dfrac{(M+m)g\sin\alpha}{k}\right)^2 + \dfrac{2E_{ma}}{k}}$

ed essendo $x_{eq} = \dfrac{(M+m)g\sin\alpha}{k}$ si ottiene l'espressione $x_{\max} = x_{eq} + \sqrt{x_{eq}^2 + \dfrac{2E_{ma}}{k}} =$ **= 12.6 cm**

L'ampiezza di oscillazione è $A = x_{\max} - x_{eq} =$ **9.3 cm**

Il periodo di oscillazione è $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{M+m}{k}} =$ **0.40 s**

3-B-D. Un blocco di massa m_1=2 kg viene lanciato lungo un piano orizzontale liscio con energia cinetica di 100 J contro un secondo blocco di massa m_2=3 kg, inizialmente fermo nel quale si incastra. A seguito dell'urto i due blocchi proseguono il loro moto alla fine urtando centralmente ed elasticamente un terzo blocco di massa m_3=3 kg inizialmente fermo. Calcolare le velocità di tutti e tre i blocchi al termine degli urti, le relative energie cinetiche e l'energia persa durante gli urti.



Soluzione 3-B-D

Il blocco m_1 ha una energia cinetica di K^{prima}=**100 J.**

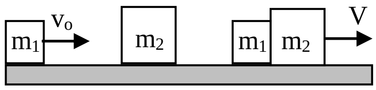
Da questo è ricavabile la velocità del blocco: $v_o = \sqrt{\dfrac{2K^{prima}}{m_1}} =$ **10 m/s**

URTO PERFETTAMENTE ANELASTICO

Il primo urto è perfettamente anelastico. I due blocchi si fondono in un solo corpo di massa m_1+m_2.

Dalla conservazione della quantità di moto $m_1 v_1 = (m_1 + m_2)V$

Per cui la velocità dopo l'urto dei blocchi uniti m_1+m_2 diviene



$V = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \dfrac{2}{5} v_1 =$ **4 m/s**

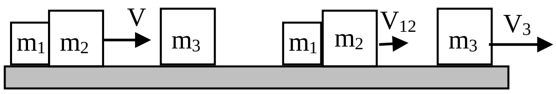
cui corrisponde una **energia cinetica** del gruppo

$$K^{dopo} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} K^{prima} = \frac{2}{5} K^{prima} = \mathbf{40\ J}$$

con una **energia persa** durante l'urto $K^{prima} - K^{dopo} =$ **60 J**

URTO ELASTICO

Durante il secondo urto vengono conservate la quantità di moto e l'energia cinetica. Le velocità dei blocchi dopo l'urto rispettivamente V_{12} e V_3 si ottengono dalle formule generali imponendo la velocità inizialmente nulla del blocco m_3:



$$\begin{cases} V_{12} = \left[\dfrac{(m_1 + m_2) - m_3}{(m_1 + m_2) + m_3}\right] V = \dfrac{1}{4} V = 1 m/s \\ V_3 = \left[\dfrac{2(m_1 + m_2)}{(m_1 + m_2) + m_3}\right] V = \dfrac{5}{4} V = 5 m/s \end{cases}$$

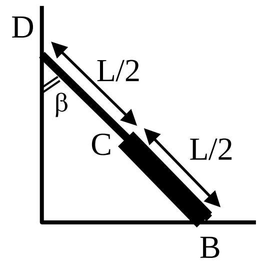
cui corrisponde la seguente distribuzione delle due energie cinetiche finali

per il blocco m_1+m_2: $K_{12} = \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2)V_{12}^2 =$ **2.5 J**

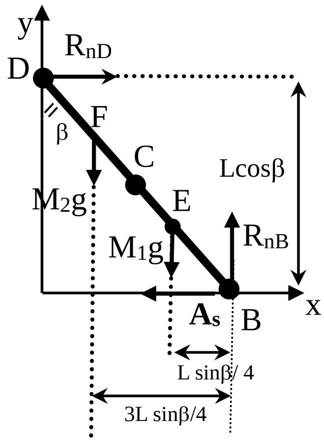
e per il blocco m_3: $K_3 = \dfrac{1}{2} m_3 V_3^2 =$ **37.5 J**

(*Naturalmente nel secondo urto elastico l'energia cinetica si è conservata e l'energia persa complessivamente è rimasta* ***60 J***)

4-A-D. Una scala di lunghezza L, inclinata rispetto alla verticale di un angolo β=50°, è disposta come in figura con gli estremi B,D appoggiati su due superfici piane, rispettivamente orizzontale e verticale. L'asta è costituita da due parti omogenee saldate: una prima metà di massa M_1=4kg lunga L/2 (tratto BC), ed una seconda metà di massa M_2=2kg lunga L/2 (tratto CD). Si calcoli quale è il coefficiente di attrito statico richiesto nel punto B minimo per tenere in equilibrio la scala.



Soluzione 4-A-D
Statica della scala
La forza peso dell'asta viene suddivisa in due forze: $\mathbf{M_1g}$ applicata nel punto E (a metà del tratto inferiore dell'asta) e $\mathbf{M_2g}$ applicata nel punto F (a metà del tratto superiore dell'asta). La reazione del pavimento $\mathbf{R_{nB}}$, la forza di attrito statico $\mathbf{A_s}$ applicate entrambe in B, e la reazione normale dalla parete $\mathbf{R_{nD}}$. In condizione statiche entrambe le equazioni cardinali devono essere contemporaneamente nulle.



Proiettando la 1ª equazione cardinale lungo x, y:

$$\begin{array}{l} x) \\ y) \end{array}\begin{cases} R_{nD} - A_s = 0 \\ R_{nB} - M_1 g - M_2 g = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} A_s = R_{nD} \\ R_{nB} = (M_1 + M_2) g \end{cases}$$

Calcolando la 2ª equazione cardinale nel punto B

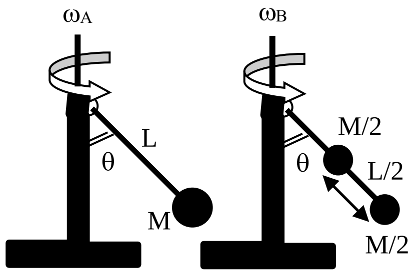
$$M_{RnD} + M_{P1} + M_{P2} = R_{nD} L \cos\beta - M_1 g L \sin\beta/4 - 3 M_2 g L \sin\beta/4 = 0$$

da cui si ricava l'intensità della forza $R_{nD} = \left(\frac{M_1 g}{4} + \frac{3 M_2 g}{4} \right) tg\beta$

combinando le equazioni $A_s = R_{nD} = \frac{M_1 + 3M_2}{4} g \cdot tg\beta \le A_{max} = \mu_s R_{nB} = \mu_s (M_1 + M_2) g$

da cui $\mu_s \ge \frac{M_1 + 3M_2}{4(M_1 + M_2)} tg\beta = \mathbf{0.50}$

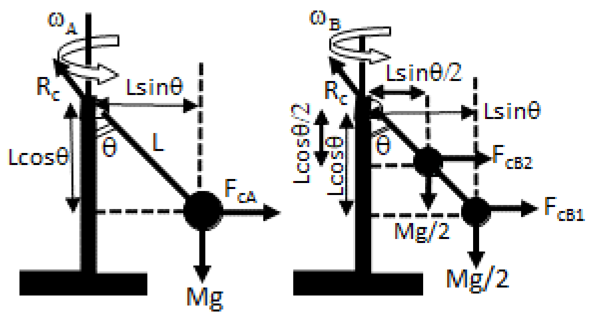
4-B-C. Un progettista di giostre deve comparare le due ipotesi di pendoli conici indicati in figura. Nel primo caso (a) ad una asta rigida di lunghezza L=3m e di massa trascurabile, girevole intorno ad un palo viene inserita una massa M=20 kg all'estremo libero. Durante la rotazione si prevede che l'asta si inclini di un angolo θ=30° rispetto alla verticale. Determinare la velocità angolare richiesta ω_A. Nel secondo caso (b) sull'asta vengono inserite due masse di valore M/2 una nell'estremo libero ed una al centro dell'asta. Determinare la velocità angolare ω_B richiesta per ottenere la medesima inclinazione di θ=30°



Soluzione 4-B-C.

Le forze agenti su ciascuna massa m sono:
la forza peso **P=mg**,
la forza centrifuga $\mathbf{F_c=m\omega^2 r}$ ove **r** è la distanza dall'asse
La reazione sul cardine $\mathbf{R_c}$ generalmente incognita

Per avere l'equilibrio in entrambi i casi si deve annullare la 2°equazione cardinale. Si assuma positivo il momento della forza centrifuga, negativo quello della forza peso



CASO A

La somma dei momenti della 3 forze si devono annullare. Il momento della reazione sul cardine Rc è nullo perché non ha braccio.

$M_{Rc} + M_{FCA} + M_P = 0$ che si semplifica nella $M_{FCA} + M_P = 0$

$F_{CA}(L\cos\theta) - Mg(L\sin\theta) = 0$ dove esplicitando $F_{CA} = M\omega_A^2 L\sin\theta$

permette di calcolare la velocità angolare

$$\omega_A = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}} = \mathbf{1.94\ rad/s}$$

CASO B

In questo caso sono due le forze peso di valore P_1=Mg/2 nell'estremo, e P_2=Mg/2 nel punto centrale. Due anche sono le forze centrifughe F_{CB1} nell'estremo, e F_{CB2} nel punto centrale. Infine c'è la reazione sul cardine R_c che però non ha momento.

$M_{Rc} + M_{P1} + M_{P2} + M_{FcB1} + M_{FcB2} = 0$ che diviene $M_{P1} + M_{P2} + M_{FcB1} + M_{FcB2} = 0$

$$F_{CB1}(L\cos\theta) + F_{CB2}\left(\frac{L}{2}\cos\theta\right) - \frac{Mg}{2}(L\sin\theta) - \frac{Mg}{2}\left(\frac{L}{2}\sin\theta\right) = 0$$

dove le forze centrifughe valgono $F_{CB1} = \frac{M}{2}\omega_B^2 L\sin\theta$ **e** $F_{CB2} = \frac{M}{2}\omega_B^2 \frac{L}{2}\sin\theta$

permette di calcolare la velocità angolare

$$\omega_B = \sqrt{\frac{6}{5}\frac{g}{L\cos\theta}} = \mathbf{2.13\ rad/s}$$