FISICA

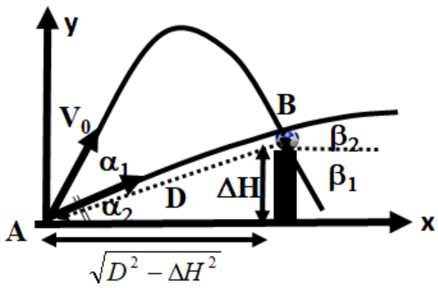
A.A. 2017-2018
Ingegneria Gestionale
Esonero del 27 Aprile 2018

1. Un cannone è capace di sparare proiettili con una velocità iniziale di V_o=1km/s viene usato per innescare una valanga sulla cima di una montagna. Il bersaglio è posto sulla cima ad una distanza dal cannone che è in linea d'aria D=2.15 km, mentre il dislivello fra le quote del bersaglio in cima ed il piano dove è collocato il cannone è ΔH=800m. Determinare l'angolo di alzo cui deve sparare il cannone ed il tempo di volo del proiettile, e l'angolo con cui impatta sul bersaglio (calcolato rispetto all'orizzontale)

1 soluzione. Equazioni della cinematica.
Le grandezze cinematiche vengono scomposte secondo gli assi x,y

lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = V_0 \cos\alpha \cdot t \\ v_x(t) = V_0 \cos\alpha \\ a_x = 0 \end{cases}$, e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = V_0 \sin\alpha \cdot t - gt^2/2 \\ v_y(t) = V_0 \sin\alpha - gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Equazione della traiettoria.
La equazione della traiettoria y(x) si ottiene eliminando il tempo t dai due moti componenti x(t) ed y(t).



Esplicitando il tempo nella prima equazione x(t), $t = \dfrac{x}{V_o \cos\alpha}$

si determina l'equazione della traiettoria parabolica cui si deve imporre il passaggio per il punto B(x_B,y_B) ottenendo

$$y_B = tg\alpha \cdot x_B - \left(\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}\right) x_B^2 \qquad \text{essendo} \qquad \begin{cases} x_B = \sqrt{D^2 - \Delta H^2} = 1996m \\ y_B = \Delta H = 800m \end{cases}$$

L'equazione può essere espressa in funzione di tgα dopo qualche passaggio algebrico

$$y_B = tg\alpha \cdot x_B - \left(\frac{g}{2V_0^2 \cos^2\alpha}\right) x_B^2 \left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) \quad \text{trasformandosi in} \quad y_B = tg\alpha \cdot x_B - \frac{g x_B^2}{2V_0^2}\left(tg^2\alpha + 1\right)$$

che dà luogo ad una equazione di secondo grado in tgα $\quad tg^2\alpha - \dfrac{2V_0^2}{g x_B} tg\alpha + \left(1 + \dfrac{2V_0^2}{g}\dfrac{y_B}{x_B^2}\right) = 0$

con **due soluzioni possibili per l'angolo di alzo** $\quad \alpha_{1,2} = arctg\left[\dfrac{V_0^2}{g x_B} \pm \sqrt{\dfrac{V_0^4}{g^2 x_B^2} - \left(1 + \dfrac{2V_0^2}{g}\dfrac{y_B}{x_B^2}\right)}\right].$

rispettivamente $\begin{cases} \alpha_1 = arctg(101.8) = 89°26' \\ \alpha_2 = arctg(0.412) = 22°24' \end{cases}$ Il colpo raggiunge l'obiettivo al tempo $t_{1,2} = \dfrac{x_B}{V_o \cos\alpha_{1,2}}$

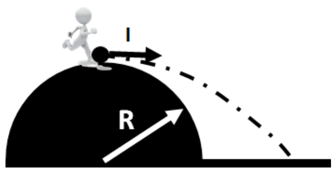
che porta a **due tempi di volo possibili** $\begin{cases} t_1 = 203s \\ t_2 = 2.16s \end{cases}$ a seconda della parabola scelta.

Infine **l'angolo di impatto sul bersaglio** rispetto all'orizzontale si ottiene dalla

$$\beta_{1,2} = arctg\left[\frac{v_y(t_{1,2})}{v_x}\right] = arctg\left[\frac{V_o \sin(\alpha_{1,2}) \cdot t_{1,2} - gt_{1,2}^2/2}{V_o \cos(\alpha_{1,2})}\right] = \begin{cases} \beta_1 = arctg(-101.05) = -89°26' \\ \beta_2 = arctg(0.389) = 21°17' \end{cases}$$

Si noti che nella prima traiettoria il proiettile è sparato quasi in verticale e ricade dopo circa 203 s sul bersaglio dall'alto con un angolo quindi negativo rispetto all'orizzontale di -89°26'. Dato il tempo di volo estremamente elevato questo colpo è di solito sconsigliato, sebbene fisicamente possibile.

1. Un calciatore si trova sulla sommità di una roccia semisferica di raggio R=10m e calcia una palla di massa m=300g inizialmente ferma fornendo un impulso orizzontale I. Determinare quale deve essere il valore minimo I_{min} dell'impulso affinché non urti mai la roccia durante il lancio. Assumendo di fornire I_{min} calcolare anche a che distanza dalla roccia la palla toccherà suolo



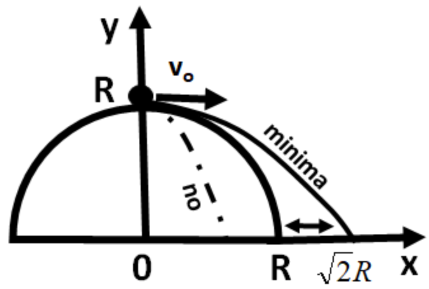
1 soluzione. L'impulso orizzontale produce una variazione della quantità di moto del pallone inizialmente fermo: $I = \Delta p = mv_o - 0$ da cui si ricava la **velocità di lancio del pallone** $v_o = I/m$

Equazioni della cinematica del pallone. Le grandezze cinematiche vengono scomposte secondo gli assi x,y

Lungo l'asse x $\begin{cases} x(t) = v_o \cdot t \\ v_x(t) = v_0 \\ a_x = 0 \end{cases}$ e lungo l'asse y $\begin{cases} y(t) = R - gt^2/2 \\ v_y(t) = -gt \\ a_y = -g \end{cases}$

Equazione della traiettoria del pallone: dalla equazione x(t) si esplicita il tempo $t = \frac{x}{v_o}$ che si sostituisce nell'equazione y(t) in modo da determinare l'equazione della traiettoria parabolica

$$y_{palla} = R - \left(\frac{g}{2v_o^2}\right)x^2$$



L'equazione del **profilo semicircolare della roccia** è $y^2 + x^2 = R^2$ da cui $y_{circ} = \sqrt{R^2 - x^2}$

e la condizione affinché il volo libero del pallone avvenga senza contatto o scivolamento sulla guida circolare è dato dalla disequazione $y_{palla} > y_{circ}$ per x>0

$$R - \left(\frac{g}{2v_o^2}\right)x^2 > \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{che quadrata} \quad R^2 + \left(\frac{g}{2v_o^2}\right)^2 x^4 - \frac{gR}{v_o^2}x^2 > R^2 - x^2$$

Dopo opportune semplificazioni e dividendo per x^2 si ottiene $\left(\frac{g}{2v_o^2}\right)^2 x^2 - \left(\frac{gR}{v_o^2} - 1\right) > 0$

che è una disequazione sempre verificata (per qualsiasi x) se il termine $\left(\frac{gR}{v_o^2} - 1\right) < 0$

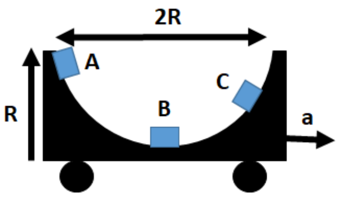
ossia $v_o > v_{o,\min} = \sqrt{gR}$ **= 9.9 m/s** da cui si ottiene **l'impulso minimo** $I_{\min} = m\sqrt{gR} =$ **2.97 kg·m**

Punto di impatto: il tempo di volo si ottiene da $y(t) = R - \dfrac{gt^2}{2} = 0$ da cui $t = \sqrt{\dfrac{2R}{g}}$

ed il punto di impatto $x(t) = v_{o,\min} t = \sqrt{gR}\sqrt{\dfrac{2R}{g}} = \sqrt{2}R$ =**14.1 m**

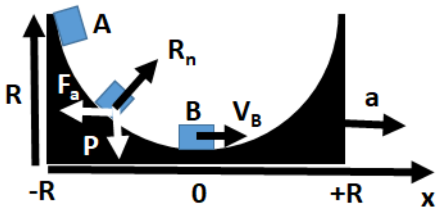
ad una **distanza dalla base della roccia** $\Delta x = \left(\sqrt{2} - 1\right)R =$ **4.14 m**

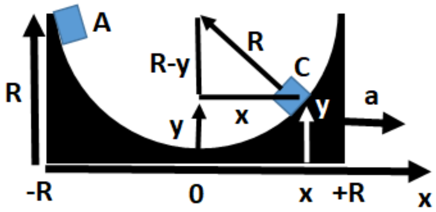
2. Una guida liscia con un profilo semicircolare di raggio R=10m si trova su un carrello soggetto ad una accelerazione uniforme di valore a=2m/s^2 lungo il piano orizzontale. Un blocco inizialmente fermo è appoggiato sulla guida ad una altezza R come indicato in figura nel punto A. Nel sistema solidale al carrello determinare a quale velocità giunge nel punto più basso al centro della guida (punto B). Determinare anche durante la risalita quale altezza massima viene raggiunta nel punto C. (*Nota bene la forza apparente compie lavoro durante il moto*)



2 soluzione. Calcolo della velocità nel punto B

Tale calcolo si effettua applicando il teorema del lavoro e della variazione di energia cinetica tra i punti A e B nel sistema mobile solidale al carrello. Il lavoro è svolto dalla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e dalla forza apparente $\vec{F}_a = -m\vec{a}$. Viceversa la reazione normale non compie mai lavoro perché ortogonale allo spostamento.





$L_{AB}^{P} = \int_A^B m\vec{g}\cdot d\vec{s} = \int_R^0 -mgdy = mgR$ il lavoro della forza peso da A a B

$L_{AB}^{Fa} = \int_A^B -m\vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_{-R}^0 -madx = -maR$ il lavoro della forza apparente

$\Delta K = K_B - K_A = \frac{1}{2}mv_B^2$ la variazione di energia cinetica

Applicando il teorema del lavoro e della variazione della energia cinetica $\Delta K = L_{AB}^{P} + L_{AB}^{Fa}$

$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgR - maR$ da cui la **velocità relativa in B** vale $v_B = \sqrt{2R(g-a)} =$ **12.5 m/s**

Calcolo della altezza y nel punto C di inversione del moto

Analogamente il calcolo si effettua applicando il teorema del lavoro e della variazione di energia cinetica tra i punti A e C nel sistema mobile solidale al carrello.

$L_{AC}^{P} = \int_A^C m\vec{g}\cdot d\vec{s} = \int_R^y -mgdy = mg(R-y)$ il lavoro della forza peso da A a C

$L_{AC}^{Fa} = \int_A^C -m\vec{a}\cdot d\vec{s} = \int_{-R}^x -madx = -ma(R+x)$ il lavoro della forza apparente da A a C

$\Delta K = K_C - K_A = 0$ L'energia cinetica è nulla in entrambi i punti A e C.

Quindi $L_{AC}^{P} + L_{AC}^{Fa} = 0$ che semplificando per la massa porta alla equazione $g(R-y) = a(R+x)$

che isolando la x diviene : $(g-a)R-gy=ax$

Con riferimento alla figura applicando il teorema di Pitagora $x=\sqrt{R^2-(R-y)^2}=\sqrt{2Ry-y^2}$

cosicchè la equazione precedente dipende dalla sola incognita finale y: $(g-a)R-gy=a\sqrt{2Ry-y^2}$

Quadrando ed ordinando si giunge ad una equazione di secondo grado:

$$y^2\left(g^2+a^2\right)-2yR\left[\left(g^2+a^2\right)-ga\right]R-(g-a)^2R^2=0$$

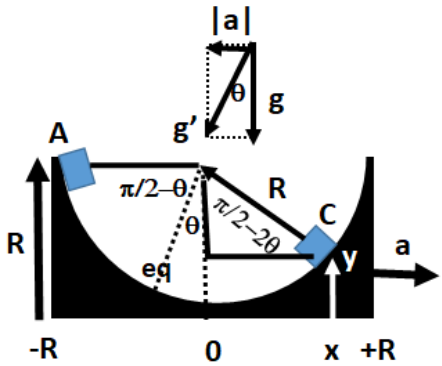
che ha soluzione $y_{1,2}=\dfrac{\left[\left(g^2+a^2\right)-ga\right]\pm\sqrt{\left[\left(g^2+a^2\right)-ga\right]^2+\left(g^2+a^2\right)(g-a)^2}}{g^2+a^2}R$

e dopo semplici passaggi $y_{1,2}=\dfrac{\left(g^2+a^2\right)-ga\pm ga}{g^2+a^2}R$ con soluzioni $\begin{cases} y_1=R \\ y_2=\dfrac{(g-a)^2}{g^2+a^2}R=6.08m \end{cases}$

(la prima soluzione va scartata perché rappresenta il punto di partenza A)

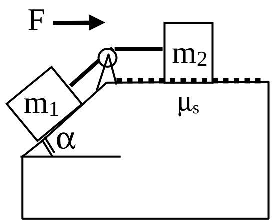
Ragionamento geometrico alternativo

Nel sistema mobile si avverte una accelerazione relativa $g'=\sqrt{g^2+a^2}$ inclinata di un angolo θ rispetto alla verticale tale che $\begin{cases} g=g'\cos\theta \\ a=g'\sin\theta \end{cases}$. Quindi il punto di equilibrio nel carrello si sposta sulla semicirconferenza inclinandosi dello stesso angolo θ rispetto alla verticale. Le oscillazioni della massa m quindi avverranno tra il punto A ed il punto C posti simmetricamente rispetto al nuovo punto di equilibrio, con un angolo di oscillazione massimo π/2–θ , cosicché l'angolo al centro del punto C diviene π/2–2θ rispetto alla verticale. La quota y si ricava facilmente dalla



$$y=R\left[1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right]=R[1-\sin(2\theta)]=R(1-2\sin\theta\cos\theta)=R\left(1-2\frac{ag}{g^2+a^2}\right)=R\frac{(g-a)^2}{g^2+a^2}=\mathbf{6.08\ m}$$

2. Un blocco di massa m_2=10kg è posto su di un piano orizzontale scabro caratterizzato da un coefficiente di attrito statico μ_s=0.1. Al blocco è collegato, attraverso fune e puleggia un altro blocco di massa m_1=6kg disposto su un piano liscio inclinato di α=30° rispetto all'orizzontale. Pertanto il sistema non è in equilibrio. Tuttavia la presenza di una elevata forza del vento F che agisce orizzontalmente su entrambe le masse riesce a fermare il sistema. Determinate l'intervallo di valori della forza F affinché il sistema rimanga in equilibrio.



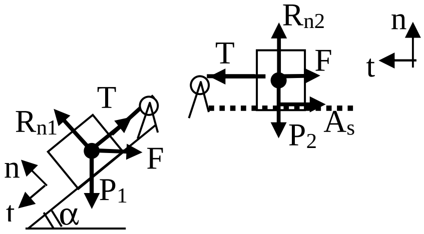
2 soluzione. Equilibrio ottenuto con minima forza del vento F_{min}

Come indicato nel testo il sistema tenderebbe a scivolare lungo il versante sinistro se non ci fosse la forza del vento F agente in orizzontale su entrambe le masse, ostacolando così il possibile moto (stato di quiete a=0).

Le forze vanno proiettate sugli assi normale n, e tangenziale t, quest'ultimo scelto concordemente al possibile moto di discesa lungo il versante sinistro

$$\text{massa } m_1 \text{ ; } \begin{cases} t) \quad P_1 \sin\alpha - F\cos\alpha - T = 0 \\ n) \quad R_{n1} = P_1 \cos\alpha + F \sin\alpha \end{cases}$$

$$\text{massa } m_2 \text{ ; } \begin{cases} t) \quad T - F - A_s = 0 \\ n) \quad R_{n2} = P_2 \end{cases}$$



sommando le equazioni lungo l'asse tangenziale si elimina la tensione T e si trova una espressione esplicitando l'attrito statico con annessa la sua disequazione di verifica:

$$A_s = P_1 \sin\alpha - F(1+\cos\alpha) \leq A_{\max} = \mu_s R_{n2} = \mu_s P_2$$

dalla quale si esplicita il valore minimo della forza necessaria a far rimanere il sistema in equilibrio

$$F \geq F_{\min} = \frac{m_1 \sin\alpha - \mu_s m_2}{1+\cos\alpha} g = \mathbf{10.5\ N}$$

Verifica dello stato di tensione della fune

E' importante sottolineare che si impone sempre una verifica sullo stato di tensione della fune sul lato della massa m_1 controllando che sia sempre positivo T>0. Nel caso in cui ciò non avvenisse la fune perde tensione e i due corpi si muovono indipendentemente. Bisogna quindi imporre che

Imporre T>0 significa $P_1 \sin\alpha - F\cos\alpha > 0$ ossia $F < F_{\max} = m_1 g \cdot tg\alpha = \mathbf{33.95\ N}$

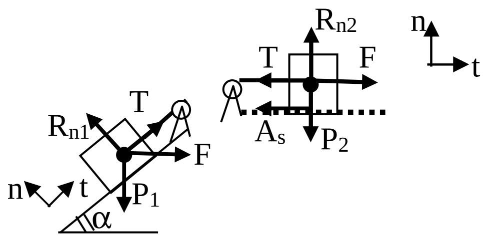
Equilibrio ottenuto con massima forza del vento F_{max}

Nel caso di elevata forza del vento F agente in orizzontale su entrambe le masse, il moto potrebbe invece avvenire verso destra facendo risalire la massa m_1.

Le forze vanno proiettate sugli assi normale n, e tangenziale t, quest'ultimo scelto concordemente al possibile moto di salita lungo il versante sinistro ma imponendo al solito lo stato di quiete con a=0 (l'attrito in questo caso cambia verso).

$$\text{massa } m_1 \text{ ; } \begin{cases} t) \quad -P_1 \sin\alpha + F\cos\alpha + T = 0 \\ n) \quad R_{n1} = P_1 \cos\alpha + F \sin\alpha \end{cases}$$

$$\text{massa } m_2 \text{ ; } \begin{cases} t) \quad F - A_s - T = 0 \\ n) \quad R_{n2} = P_2 \end{cases}$$



sommando le equazioni lungo l'asse tangenziale si elimina la tensione T e si trova una espressione esplicitando l'attrito statico con annessa la sua disequazione di verifica:

$$A_s = F(1+\cos\alpha) - P_1 \sin\alpha \leq A_{\max} = \mu_s R_{n2} = \mu_s P_2$$

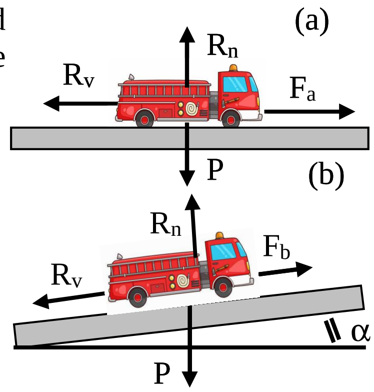
dalla quale si esplicita il valore minimo della forza necessaria a far rimanere il sistema in equilibrio

$$F \leq F_{\max} = \frac{m_1 \sin\alpha + \mu_s m_2}{1+\cos\alpha} g = \mathbf{21\ N}$$ condizione più stringente della precedente F< **33.95 N**

Pertanto l'intervallo richiesto per la **forza del vento** è $10.5N \leq F \leq 21N$

3. Il motore di un autocarro eroga una potenza costante P. L'autocarro viaggia alla velocità costante di v_1=90km/h, mentre in salita, viaggiando su un piano inclinato di 10° rispetto all'orizzontale la sua velocità si riduce a v_2=60km/h. Sapendo che la massa dell'autocarro è di M=10T ed ipotizzando che le forze di attrito viscoso siano proporzionali alla prima potenza della velocità si calcoli la potenza erogata dal motore

3 soluzione. La forza motrice sviluppa una potenza **P=F·v** da cui la forza motrice è dipende dalla velocità secondo la formula **F=P/v.** Ad essa si oppone una forza resistente $\mathbf{R_v=b\cdot v}$. A regime, la velocità tende ad assumere un valore costante **v** e l'accelerazione tende a zero.



Nel caso del moto in piano (a) la scomposizione delle forze è

$$\begin{aligned} t)&\begin{cases} F_a - bv_1 = Ma = 0 \\ R_n - Mg = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad \text{da cui} \quad F_a = bv_1$$

da cui moltiplicando ambo i membri per v_1 si ottiene $P = bv_1^2$

Quando invece l'auto si muove sul piano inclinato (b) la scomposizione diviene

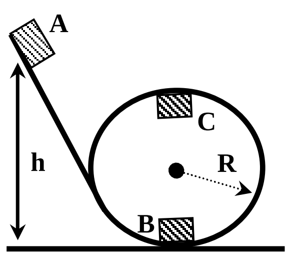
$$\begin{aligned} t)\\ n) \end{aligned}\begin{cases} F_b - bv_2 - Mg\sin\alpha = Ma = 0 \\ R_n - Mg\cos\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{da cui} \quad F_b = bv_2 + Mg\sin\alpha$$

e moltiplicando per v_2 si ottiene

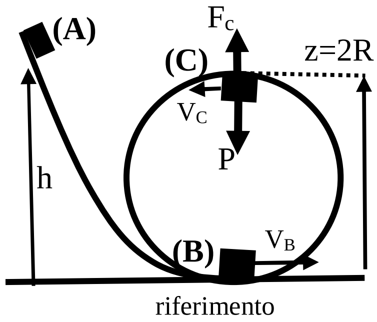
$P = bv_2^2 + Mgv_2\sin\alpha$. Se il termine b viene ricavato dalla equazione nel piano $b = P/v_1^2$

si ottiene quindi $P = P\left(\frac{v_2^2}{v_1^2}\right) + Mgv_2\sin\alpha$ da cui **la potenza** $P = \dfrac{Mgv_2\sin\alpha}{1-\left(\dfrac{v_2}{v_1}\right)^2} =$ **510 kW**

3. Un progettista intende fare uno studio di fattibilità di una montagna russa in cui la rotaia è composta da un tratto rettilineo obliquo discendente che si innesta su di un tratto circolare completo di raggio R=15m. Il progetto prevede che il carrello abbia velocità nulla nel punto A di massima quota, transiti alla massima velocità nel punto B di minima quota, raggiunga l'apice del tratto circolare in C con velocità sufficiente per completare il giro della morte tornando infine in B. Trascurando tutti gli attriti lungo il tragitto, dovendo progettare il dislivello h fra i punti A e B, determinare l'intervallo di valori ammessi fornendo le quote minima h_{min} e massima h_{max} in modo da consentire il completamento del giro ma con una accelerazione in B sopportabile inferiore a sette volte l'accelerazione di gravità (7g).



3 soluzione. Quota minima per completare il giro della morte



a) Imponendo la condizione di non distacco nel punto C: $F_c > P$

ossia $m\frac{v_C^2}{R} > mg$ si ottiene $v_C > v_{C,\min} = \sqrt{gR}$

b) imponendo la conservazione dell'energia meccanica in A e C nel caso limite in cui il blocco cade dalla quota minima h_{min} raggiungendo in C la velocità minima $v_{C,min}$

$$E_A = mgh_{\min} \quad = \quad E_C = mg(2R) + \frac{1}{2}mv_{C,\min}^2 = \frac{5}{2}mgR \quad \text{da cui} \quad h \geq h_{\min} = \frac{5}{2}R = \mathbf{37.5\ m}$$

Condizione sulla massima accelerazione in B

c) imponendo la conservazione dell'energia meccanica in A e B

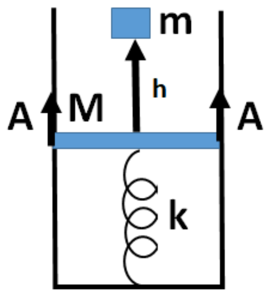
$$E_A = mgh \quad = \quad E_B = \frac{1}{2}mv_B^2 \quad \text{da cui} \quad v_B = \sqrt{2gh}$$

L'accelerazione normale nel punto B della circonferenza deve essere inferiore a 7g per cui

$a_B = \frac{v_B^2}{R} = \frac{2h}{R}g \leq 7g$ dal quale si ottiene la condizione $h \leq h_{\max} = \frac{7}{2}R = \mathbf{52.5\ m}$

Combinando le due disequazioni si ottiene la condizione finale $h_{\min} \leq h \leq h_{\max}$ ossia $\frac{5}{2}R \leq h \leq \frac{7}{2}R$

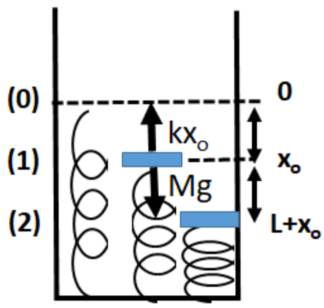
4. Una piattaforma di massa M=6kg è in equilibrio su di una molla ideale di massa trascurabile di costante elastica k=20N/m. All'istante t=0 un blocco di massa m=1kg viene lasciato cadere (con velocità iniziale nulla) sulla piattaforma da una altezza h=2m rispetto alla piattaforma. All'istante t_1 il blocco urta elasticamente la piattaforma rimbalzando, mentre la piattaforma inizia a muoversi verso il basso su due guide laterali che esercitano ciascuna una forza di attrito A=20N. All'istante t_2 la piattaforma raggiunge la massima compressione della molla. Determinare



1. l'accelerazione della piattaforma all'istante t_2
2. la velocità della piattaforma dopo l'urto

4. soluzione.Precompressione della molla e accelerazione della piattaforma

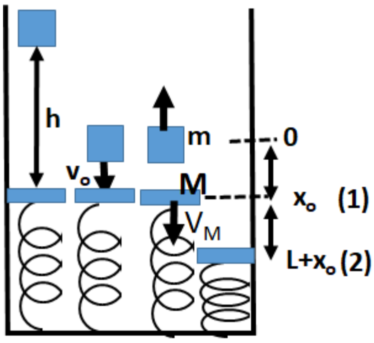
La molla sulla quale poggia la piattaforma ha una compressione iniziale x_o che serve a sostenere il peso della piattaforma stessa. Si trova quindi inizialmente nella posizione (1). Il valore della compressione iniziale x_o si ricava dall'equilibrio fra le forze (in questo caso statico l'attrito A non agisce)



$kx_o = Mg$ da cui $x_o = \frac{Mg}{k} = \mathbf{2.94\ m}$

Quando la piattaforma inizia ad oscillare giungerà nel punto di inversione del moto (2) dopo essere stata compressa di una ulteriore quantità L. In quell'istante di massima compressione la piattaforma subirà una accelerazione verso l'alto *a* che si ricava dallo studio delle forze in (2) (l'attrito A non agisce perché la piattaforma è ferma in attesa di risollevarsi)

$k(L+x_o)-Mg = Ma$ da cui $a = \frac{kL}{M} + \frac{kx_o}{M} - g = \frac{k}{M}L$



Caduta della massa m

La massa m cadendo dalla quota h trasforma la sua energia potenziale *U=mgh* integralmente in energia cinetica $K = \frac{1}{2}mv_o^2$. Uguagliando i termini si ottiene la velocità di impatto $v_o = \sqrt{2gh} =$ **6.26 m/s**

Urto elastico con la piattaforma ferma

Nell'urto elastico si conserva energia cinetica e quantità di moto del sistema

La velocità acquistata dalla piattaforma $V_M = \frac{2m}{M+m}v_o = \frac{2m}{M+m}\sqrt{2gh} =$ **1.79 m/s** (verso il basso)

Determinazione della ulteriore compressione L della molla

Durante il tragitto dalla posizione (1) alla posizione (2) agisce l'attrito dinamico che compie un lavoro negativo $L_A = \int \vec{F}_A d\vec{s} = -2AL$ (la forza di attrito è doppia 2A perché agisce su entrambe le guide metalliche, il tragitto da (1) a (2) è lungo L).

Applicando le considerazioni energetiche infine $L_A = E_2 - E_1$ dove

$E_2 = \frac{1}{2}k(L+x_o)^2$ è data solo dalla potenziale elastica (piattaforma ferma nel punto più basso *rif*)

$E_1 = \frac{1}{2}kx_o^2 + MgL + \frac{1}{2}MV_M^2$ è data dalla potenziale elastica, cinetica e potenziale della forza peso ove L è il dislivello fra il punto (1) ed il riferimento in (2)

Combinando le equazioni si ottiene $-2AL = \frac{1}{2}k(L^2 + 2Lx_o + x_o^2) - \frac{1}{2}kx_o^2 - MgL - \frac{1}{2}MV_M^2$

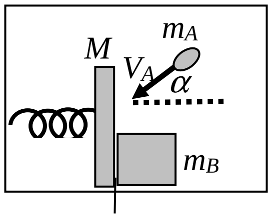
e dopo qualche passaggio algebrico $\frac{1}{2}kL^2 + (kx_o - Mg + 2A)L - \frac{1}{2}MV_M^2 = 0$.

Semplificando $kx_o=Mg$ e riordinando $L^2 + \left(\frac{4A}{k}\right)L - \left(\frac{MV_M^2}{k}\right) = 0$

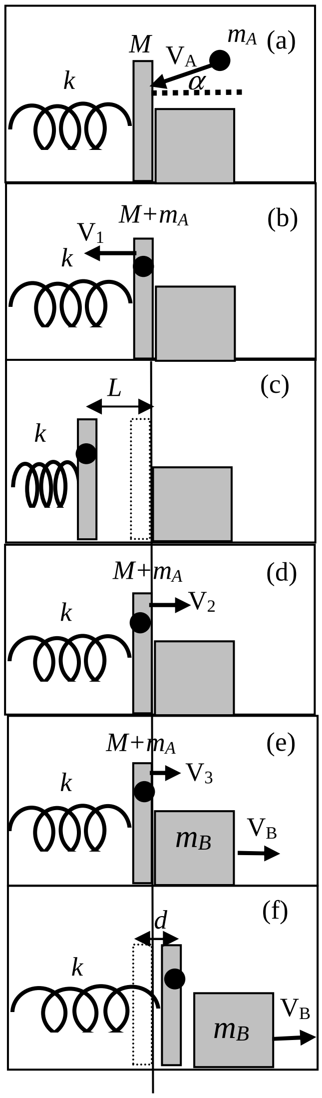
che ha la sola soluzione accettabile $L = -\left(\frac{2A}{k}\right) + \sqrt{\left(\frac{2A}{k}\right)^2 + \left(\frac{MV_M^2}{k}\right)} =$ **22.7 cm**

dalla quale si ricava **l'accelerazione della piattaforma** nel punto (2) $a = \frac{k}{M}L =$ **0.757 m/s²**

4. Un piattello di massa M=4 kg, è attaccato ad una molla di massa trascurabile di costante elastica k=10 N/m e si trova inizialmente in quiete ma con libertà di oscillare lungo un piano liscio orizzontale. Una proiettile di massa m_A=100g viaggia alla velocità V_A=100m/s in direzione obliqua (con angolo α=30° rispetto orizzontale) impattando contro il piattello all'istante t=0. L'urto è perfettamente anelastico. Determinare l'ampiezza della prima oscillazione del piattello prima di urtare elasticamente il blocco m_B=200g che è fermo in x=0. Determinare quindi la velocità di partenza del blocco m_B e l'ampiezza delle successive oscillazioni del piattello



4. soluzione. L'intero processo viene scomposto in una sequenza a,b,c,d,e,f di fenomeni consecutivi come indicato in figura:



a-b) **Urto perfettamente anelastico tra il proiettile m_A ed il piattello M**
il proiettile urta con un angolo di inclinazione a contro il piattello. Ciò causa un impulso della reazione normale dal terreno che agisce come impulso delle forze esterne in verticale. In conclusione si può ancora applicare la conservazione della quantità di moto ma solo lungo la direzione orizzontale (x è verso sinistra)

$p_{b,x} = p_{a,x}$ ossia $(M + m_A)V_1 = m_A V_A \cos\alpha$ =**8.66 kg m/s**

da cui la velocità del piattello $V_1 = \dfrac{p_{a,x}}{M + m_A} = \dfrac{m_A V_A \cos\alpha}{M + m_A}$ =**2.11 m/s**

b-c) **Prima oscillazione del piattello**
Successivamente all'urto l'energia meccanica viene conservata durante il moto armonico del piattello. Confrontando l'energia fra gli istanti b,c si ricava la massima elongazione L

$E_b = \dfrac{1}{2}(M + m_A)V_1^2$ solo cinetica, $E_c = \dfrac{1}{2}kL^2$ solo potenziale elastica

Imponendo E_c=E_b si ottiene $L = V_1\sqrt{\dfrac{M + m_A}{k}} = \dfrac{p_{a,x}}{\sqrt{k(M + m_A)}}$ =**1.35 m**

c-d) **Inversione del moto del piattello e velocità di impatto su m_B**
Dalla conservazione dell'energia meccanica tra b,c,d, durante tutte le fasi dell'oscillazione si ottiene:

$$E_d = E_c = E_b \quad \text{da cui} \quad \frac{1}{2}(M + m_A)V_2^2 = \frac{1}{2}kL^2 = \frac{1}{2}(M + m_A)V_1^2$$

In particolare confrontando b,d si ottiene $V_2 = V_1$=**2.11 m/s** (verso destra)

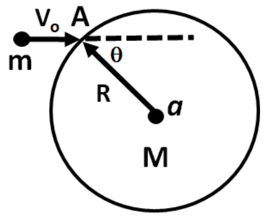
d-e) **Urto elastico contro blocco m_B fermo**
Nell'urto elastico si conserva energia cinetica e quantità di moto del sistema

Le velocità dopo l'urto elastico sono $\begin{cases} V_3 = \dfrac{(M + m_A) - m_B}{(M + m_A) + m_B}V_2 = 1.92\,m/s \\ V_B = \dfrac{2(M + m_A)}{(M + m_A) + m_B}V_2 = 4.03\,m/s \end{cases}$ (l'asse x è verso destra)

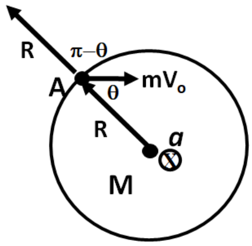
e-f) **Nuova ampiezza di oscillazione d del piattello**
Imponenedo la conservazione dell'energia meccanica del solo piattello tra e,f, $E_f = E_e$ si ottiene

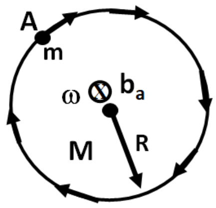
$\dfrac{1}{2}kd^2 = \dfrac{1}{2}(M + m_A)V_3^2$ ove **la nuova ampiezza di oscillazione** è $d = V_3\sqrt{\dfrac{M + m_A}{k}}$ =**1.23 m**

5. Un cilindro omogeneo di raggio R=2m e di massa M=10kg è vincolato a ruotare attorno all'asse verticale *a* come indicato in figura. Il disco inizialmente fermo viene colpito da un proiettile di massa m=200g che incide nel punto A con una velocità v_o=100m/s diretta lungo l'asse delle x incastrandosi nel cilindro. Calcolare la velocità angolare del cilindro dopo l'urto, e la velocità del punto A.
[Dati del problema: il momento di inerzia del cilindro è $I_a=MR^2/2$, θ=30°]
Facoltativo: assumendo che durante la rotazione del disco nascano attriti che danno luogo ad un momento esterno M^{ext}=4Nm che tende a far rallentare la rotazione del cilindro, determinare dopo quanti secondi il cilindro si ferma.



5. Soluzione. L'urto fra il proiettile ed il cilindro è perfettamente anelastico, Essendo il cilindro vincolato a ruotare intorno all'asse *a*, durante l'urto oltre alle forze interne nasce anche una forza impulsiva esterna agente dall'asse sul sistema cilindro/proiettile costringendolo ad una pura rotazione intorno all'asse *a*. La presenza di un impulso delle forze esterne impedisce la conservazione della quantità di moto. Tuttavia l'impulso ha origine sull'asse per cui durante l'urto **si conserva il momento della quantità di moto lungo l'asse *a***.





Il momento della quantità di moto prima dell'urto calcolato rispetto al centro del cilindro è $\vec{b}_o = \vec{R} \times m\vec{v}_o$
e rispetto all'asse a vale $b_a^{prima} = mv_o R \sin(\pi - \theta) = mv_o R \sin\theta$
dopo l'urto il proiettile si conficca nel punto A ed il momento della quantità di moto vale $b_a^{dopo} = I_{tot}\omega_o = \left(\frac{1}{2}MR^2 + mR^2\right)\omega_o$
(la rotazione oraria è scelta in questo caso positiva), dove I_{tot} è il momento di inerzia complessivo del cilindro+proiettile.

Imponendo la conservazione di $b_a^{prima} = b_a^{dopo}$ si ottiene $\omega_o = \left(\frac{2m}{M+2m}\right)\frac{v_o \sin\theta}{R} = \mathbf{0.962\ rad/s}$

con **velocità di rotazione** del punto A pari ad $V_A = \omega_o R = \left(\frac{2m}{M+2m}\right)v_o \sin\theta = \mathbf{1.92\ m/s}$

Facoltativo: il momento degli attriti tende a ridurre la velocità angolare

$-M_a^{ext} = I_{tot}\frac{d\omega}{dt}$ che integrata fornisce la velocità angolare $\omega(t) = \omega_o - \frac{M_a^{ext}}{I_{tot}}t$

La rotazione si arresta all'istante $t = \frac{I_{tot}\omega_o}{M_a^{ext}} = \frac{b_a^{prima}}{M_a^{ext}} = \frac{mv_o R \sin\theta}{M_a^{ext}} = \mathbf{5\ s}$