

# Metodi Matematici per l'Ingegneria (A.A. 2019-2020)

Metodi Numerici

Equazioni non lineari

Metodi iterativi

Docente Domenico Vitulano

Email: [domenico.vitulano@sbai.uniroma1.it](mailto:domenico.vitulano@sbai.uniroma1.it)

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 11

Tel. 06 49766555

Ricevimento: consultare la pagina web dedicata al corso

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sul sito

<https://www.sbai.uniroma1.it/vitulano-domenico/analisi-numerica/2019-2020>

# Metodi iterativi a un punto (o del punto unito)

Un **metodo iterativo a un punto** in  $\mathbf{R}$  ha la forma:

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), \quad n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

La funzione  $\varphi$  è detta **funzione di iterazione**.

**Nota.** Per il **metodo di Newton**  $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$

## Convergenza

Il metodo è **convergente** se la **successione delle approssimazioni**  $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}_{n \geq 1}$  verifica

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} |\xi - x_n| = 0} \iff \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi}$$

## Criterio di arresto

Se il metodo è convergente, una **buona approssimazione** di  $\xi$  è data dal valore  $x_N$  per il quale  $\boxed{|x_N - x_{N-1}| \leq \epsilon}$

# Metodo del punto unito

Il **metodo del punto unito** consiste nel riscrivere l'equazione non lineare di partenza in una forma equivalente:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \varphi(x)$$

Se  $\xi$  è **radice** di  $f$  allora è **punto unito** di  $\varphi$ :

$$f(\xi) = 0 \Leftrightarrow \xi = \varphi(\xi)$$

**Nota.** Trovare il **punto unito** di  $\varphi$  significa trovare l'ascissa del punto di **intersezione** tra la retta  $y = x$  e la curva  $y = \varphi(x)$ .

Una funzione può avere **più di un punto unito**, **solo uno** o **nessuno**.

# Metodo del punto unito: Esempio 1

Trovare i **punti uniti** della **funzione di iterazione**

$$\varphi(x) = x^2 - 2 \quad \text{per} \quad -2 \leq x \leq 3.$$

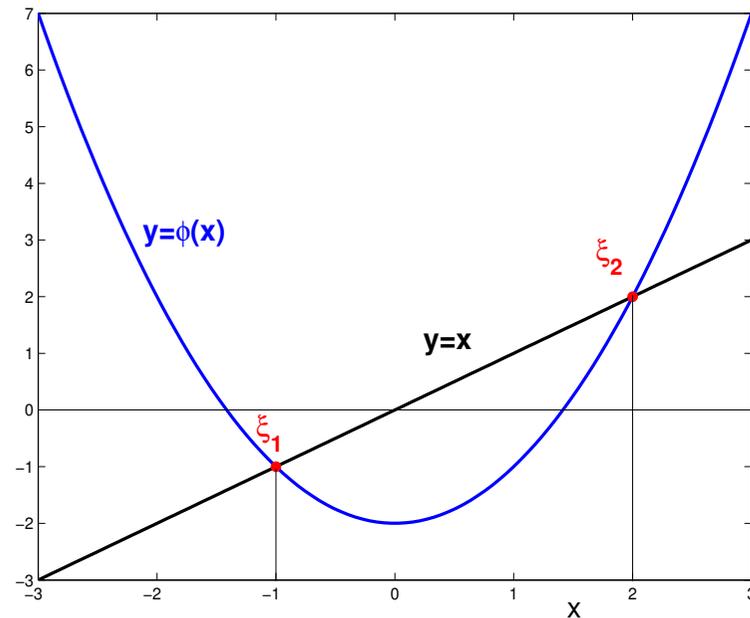
Si tratta di trovare i valori di  $x$  per i quali

$$\varphi(x) = x^2 - 2 = x \quad \Rightarrow \quad f(x) = x^2 - x - 2 = 0$$

Ci sono **due** punti uniti:

$$\xi_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad \varphi(-1) = (-1)^2 - 2 = -1$$

$$\xi_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi(2) = (2)^2 - 2 = 2$$



**Nota.**  $\xi_1$  e  $\xi_2$  sono anche le soluzioni di  $f(x) = x^2 - x - 2 = 0$

# Convergenza: condizione necessaria

**Teorema 1.** Se la successione

$$\begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_n = \varphi(x_{n-1}), n = 1, 2, \dots \end{cases}$$

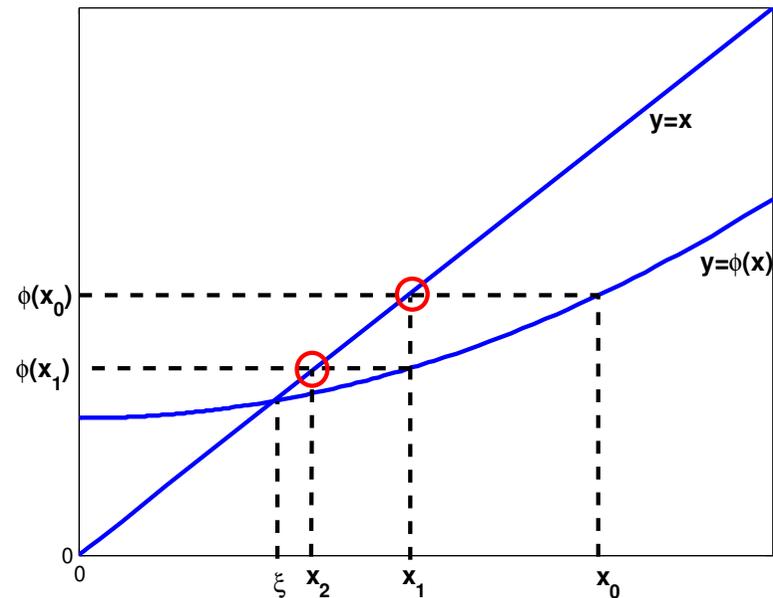
è **convergente** a un valore  $\tau$  e  $\varphi$  è **continua** in  $\tau \Rightarrow \tau$  è **punto unito** di  $\varphi$ , cioè  $\tau = \varphi(\tau)$ .

**Dimostrazione.**

$$\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_{n-1}) = \varphi\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}\right) = \varphi(\tau)$$

$x_n$  converge  $\downarrow$   $\varphi$  è continua

# Interpretazione grafica: metodo del punto unito



$x_1$  è l'ascissa del punto di intersezione della retta  $y = \varphi(x_0)$  con la retta  $y = x$

$x_2$  è l'ascissa del punto di intersezione della retta  $y = \varphi(x_1)$  con la retta  $y = x$

.....

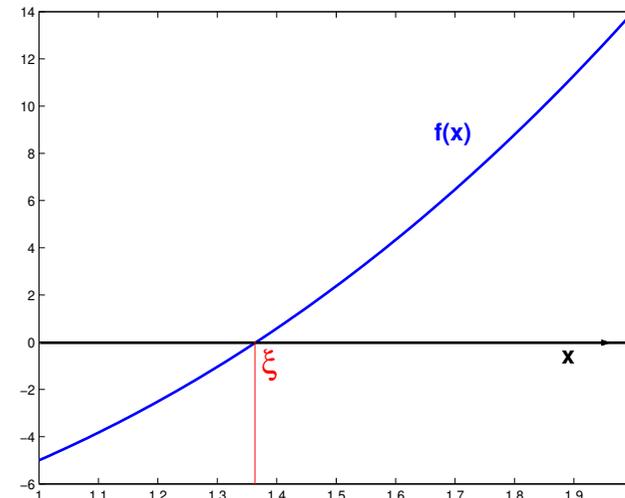
# Metodo del punto unito: Esercizio

Verificare che l'equazione  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$  ha un'**unica** radice in  $[1, 2]$  e trovare un'opportuna **funzione di iterazione** per approssimarla.

**Soluzione.**  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 8x > 0 \forall x \in [1, 2]$

$\Rightarrow f(x)$  è **monotona crescente**  $\Rightarrow \begin{cases} \min_{1 \leq x \leq 2} f(x) = f(1) = -5 < 0 \\ \max_{1 \leq x \leq 2} f(x) = f(2) = 14 > 0 \end{cases}$

$\Rightarrow$  **esiste** una radice in  $[1, 2]$  e, per la **monotonia**, è **unica**



## Esercizio: funzioni di iterazione

Per trovare una funzione di iterazione bisogna operare sull'equazione

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

1) Isolo il termine in  $x^2$

$$x^2 = \frac{1}{4}(10 - x^3)$$

$$\Rightarrow x = +\frac{1}{2}(10 - x^3)^{1/2} = \varphi_1(x)$$

2) Isolo il termine in  $x^3$

$$x^3 = 10 - 4x^2$$

$$\Rightarrow x = (10 - 4x^2)^{1/3} = \varphi_2(x)$$

3) Aggiungo  $-x$  ad ambo i membri

$$x^3 + 4x^2 - 10 - x = -x$$

$$\Rightarrow x = x - x^3 - 4x^2 + 10 = \varphi_3(x)$$

4) Divido per  $x$  e isolo il termine in  $x^2$

$$\frac{x^3 + 4x^2 - 10}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2} = \varphi_4(x)$$

5) Metodo di Newton

$$x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x$$

$$\Rightarrow x = x - \frac{x^3 + 4x^2 - 10}{3x^2 + 8x} = \varphi_5(x)$$

## Metodo delle approssimazioni successive

$$\begin{cases} x_0 = 1.5 \\ x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Iter	$x_n = \varphi_5(x_{n-1})$	$x_n = \varphi_3(x_{n-1})$
1	1.5000000000000000	1.5000000000000000
2	1.3733333333333333	-0.8750000000000000
3	1.36526201487463	6.732421875000
4	1.36523001391615	-469.720012001693
5	1.36523001341410	$1.03 \times 10^8$
6	1.36523001341410	

converge

diverge

Iter	$x_n = \varphi_1(x_{n-1})$	$x_n = \varphi_2(x_{n-1})$	$x_n = \varphi_4(x_{n-1})$
1	1.500000000	1.500000000	1.500000000
2	1.286953768	1.000000000	0.816496581
3	1.402540803	1.817120593	2.996908806
4	1.345458374	-1.474794991	0.000000000 - 2.941235061i
5	1.375170253	1.091370196	2.753622388 + 2.753622388i
6	1.360094193	1.736427733	1.814991519 - 3.534528790i
7	1.367846968	-1.272545596	2.384265848 + 3.434388064i
8	1.363887003	1.521542585	2.182771900 - 3.596879228i
9	1.365916733	0.904354471	2.296997587 + 3.574104462i
10	1.364878217	1.887879630	2.256510286 - 3.606561220i
11	1.365410061	-1.62061324	2.279179049 + 3.601936572i
12	1.365137821	-0.79662594	2.271142587 - 3.608371470i
13	1.365277208	1.954082914	2.275631311 + 3.607451621i
14	1.365205850	-1.74063131	2.274039927 - 3.608725567i
15	1.365242384	-1.28446791	2.274928362 + 3.608543344i
16	1.365223680	1.503778436	2.274613384 - 3.608795481i
17	1.365233256	0.984632264	2.274789213 + 3.608759411i
18	1.365228353	1.829353811	2.274726876 - 3.608809311i
19	1.365230863	-1.50164877	2.2747616734 + 3.60880217i
20	1.365229578	0.993357253	2.274749337 - 3.608812048i
...			
25	1.365230029	-1.373190473	2.274754931 + 3.608812641i
...			
30	1.365230013	1.092266409	2.274754877 - 3.608812723i

converge

non converge

non converge

# Convergenza: condizione sufficiente (1)

**Teorema 2.** Se  $\varphi$  è **derivabile** in  $I = [a, b]$  e

$$i) \varphi : I \rightarrow I \Leftrightarrow a \leq \min_{x \in I} \varphi(x) \leq \max_{x \in I} \varphi(x) \leq b$$

$$ii) \exists k \in (0, 1) \text{ tale che } |\varphi'(x)| \leq k, x \in I$$

$\Rightarrow$   $\alpha$ ) esiste un **unico punto unito**  $\xi \in I$  di  $\varphi(\xi)$

$\beta$ ) la successione  $x_n = \varphi(x_{n-1})$  è **convergente** a  $\xi$   
per ogni **approssimazione iniziale**  $x_0 \in I$

## Osservazione

Dalla dimostrazione del teorema precedente si deduce che l'ipotesi di derivabilità della funzione di iterazione  $\varphi$  nell'intervallo  $I$  può essere rilassata. Infatti, basta richiedere

$$\exists k \in (0, 1) : \forall x', x'' \in I \Rightarrow |\varphi(x') - \varphi(x'')| < k|x' - x''|,$$

cioè  $\varphi$  deve essere una **contrazione**.

# Metodo del punto unito: Esercizio

Tornando all'esercizio proposto precedentemente ( $f(x) = x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ ), possiamo osservare che

- la funzione  $\varphi_5$  genera un procedimento iterativo convergente in quanto sono verificate le ipotesi di applicabilità del metodo di Newton. Infatti,  $f, f', f''$  sono funzioni continue in  $I = [1, 2]$ ,  $f'(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$ ; inoltre anche  $f''(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$
- la funzione  $\varphi_3(x) = x - x^3 - 4x^2 + 10$ , invece, non genera un procedimento iterativo convergente in  $I$  in quanto

$$\varphi_3'(x) = 1 - 3x^2 - 8x \quad \text{e quindi} \quad |\varphi_3'(x)| > 1 \quad \forall x \in I$$

(osservare che  $\varphi_3''(x) < 0 \quad \forall x \in I$ )

- la funzione  $\varphi_4(x) = \sqrt{\frac{10}{x} - 4x}$  non genera un procedimento iterativo convergente in quanto  $I$  non è completamente contenuto nel dominio di esistenza  $D$  della funzione, infatti  $D = [-\infty, -\sqrt{5}/2] \cup (0, \sqrt{5}/2]$  ( $\sqrt{5}/2 = 1,118033989$ )
- la funzione  $\varphi_2(x) = (10 - 4x^2)^{1/3}$  non genera un procedimento iterativo convergente in quanto  $\varphi(I) \notin I$  ( $\varphi(2) = \sqrt[3]{-6} = -1.8171 \notin I$ ); inoltre  $|\varphi'_2(x)| > 1$  in  $I$  (basta osservare che  $\varphi'_2(x)$  non è definita in  $x = \frac{\sqrt{10}}{2} \approx 1.5811$ )

- la funzione  $\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\sqrt{10 - x^3}$  genera un procedimento iterativo convergente alla radice dell'equazione non lineare anche se non è verificata la prima ipotesi del teorema ( $\varphi(1) = 1.5$  mentre  $\varphi(2) = \sqrt{2}/2 = 0,707106781$ ).

Tuttavia, poichè

$$\varphi'_1(x) = -\frac{3}{4} \frac{x^2}{\sqrt{10 - x^3}}$$

è una funzione monotona decrescente in  $I$  e sicuramente  $|\varphi'_1(x)| < 1$  in  $\tilde{I} = [1, 1.7]$ , il procedimento iterativo risulta convergente in  $\tilde{I}$ .

## Esempio

La funzione  $\varphi(x) = x - \sin(x)$  ammette più di un punto fisso in quanto  $\sin(x)$  è una funzione periodica.

$\varphi(x) = x - \sin(x)$  è stata ottenuta dalla equazione non lineare  $f(x) = 0$ , con  $f(x) = \sin(x)$ .

Nell'intervallo  $I = [0, 2\pi]$ , gli zeri di  $f$  sono  $\xi_1 = 0$ ,  $\xi_2 = \pi$ ,  $\xi_3 = 2\pi$ .

Tuttavia, la funzione  $\varphi(x)$  sicuramente non genera un procedimento iterativo convergente a  $\xi_2$  in quanto non è possibile trovare intervalli  $J \in I : \xi_2 \in J$  per cui sia verificata la condizione  $|\varphi'(x)| < 1, \forall x \in J$ .

Infatti,  $\varphi'(x) = 1 - \cos(x)$  e pertanto in prossimità di  $\xi_2$  risulta  $|\varphi'(x)| \approx 2 > 1$ .

## Convergenza: condizione sufficiente (2)

**Teorema 3.** Se  $\varphi$  è **derivabile** in  $I = [a, b]$  e

i)  $\varphi(\xi) = \xi \quad \xi \in (a, b)$

ii)  $\exists k \in (0, 1)$  tale che  $|\varphi'(x)| \leq k, x \in I$

$\Rightarrow$  esiste un **intorno** di  $\xi$  :  $\Delta = [\xi - \delta, \xi + \delta] \subseteq I$  tale che

$\alpha$ )  $\xi$  è l'**unico punto unito** di  $\varphi(\xi)$  in  $\Delta$

$\beta$ ) la successione  $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}, n = 1, 2, \dots,$  è **convergente** a  $\xi$  per ogni **approssimazione iniziale**  $x_0 \in \Delta$

# Applicazione al metodo delle tangenti

**Teorema 4.** Se  $I = [a, b]$  è un **intervallo di separazione** di uno zero di  $f$  e inoltre

i)  $f, f', f''$  sono **continue** in  $I$ :  $f \in C^2[a, b]$

ii)  $f'(x) \neq 0$  per  $x \in [a, b]$

$\Rightarrow$  esiste un **intorno**  $J \subseteq I$  di  $\xi$  tale che per  $x_0 \in J$  la **successione delle approssimazioni**

$$\left\{ x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})} \right\}, n = 1, 2, \dots,$$

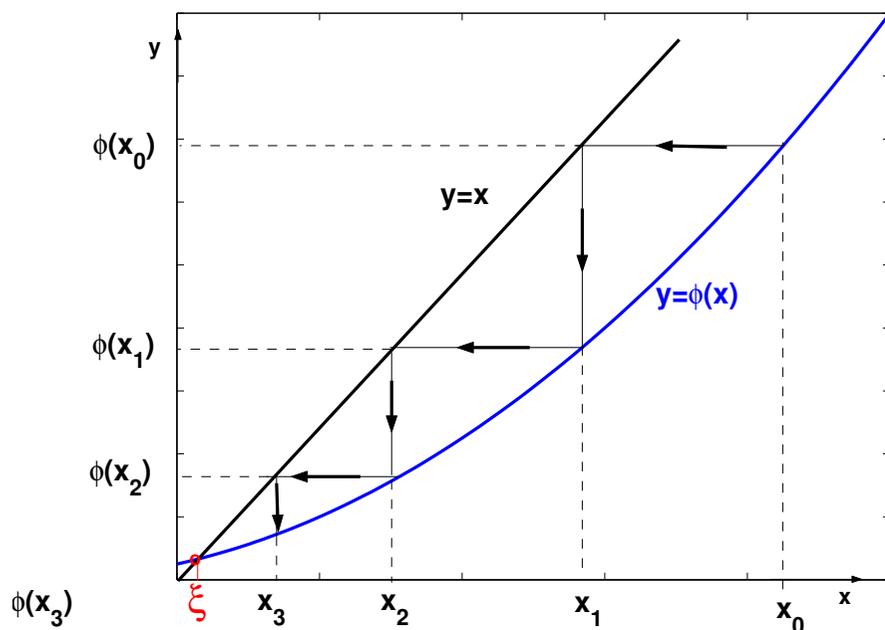
**converge** a  $\xi$

# Proprietà della successione delle approssimazioni

Si vuole caratterizzare la successione delle approssimazioni

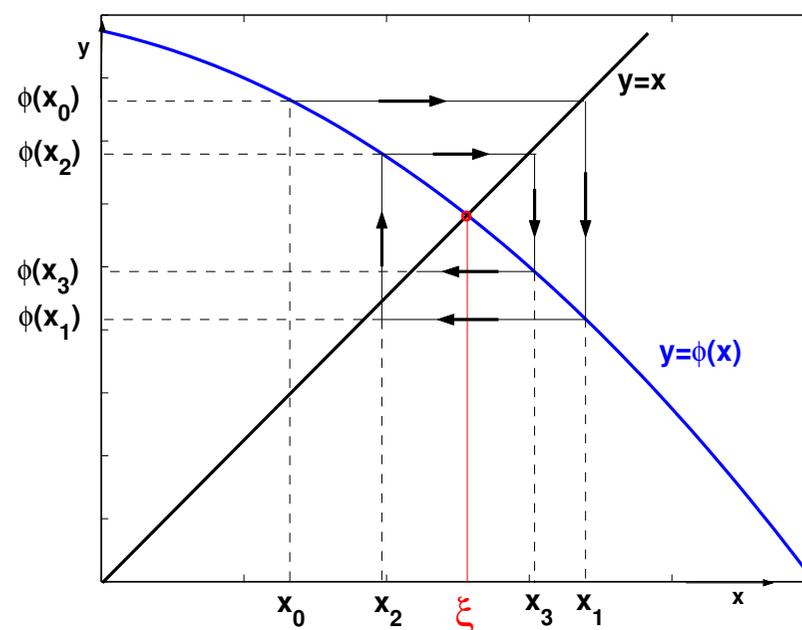
Dal **Teorema di Lagrange** si ha

$$e_n = \xi - x_n = \varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1}) = \varphi'(\xi)(\xi - x_{n-1}) = \varphi'(\xi)e_{n-1} \quad \xi \in [x_{n-1}, \xi]$$



$$0 \leq \varphi'(x) < 1$$

ad ogni iterazione l'errore diminuisce  
in valore assoluto e preserva il segno

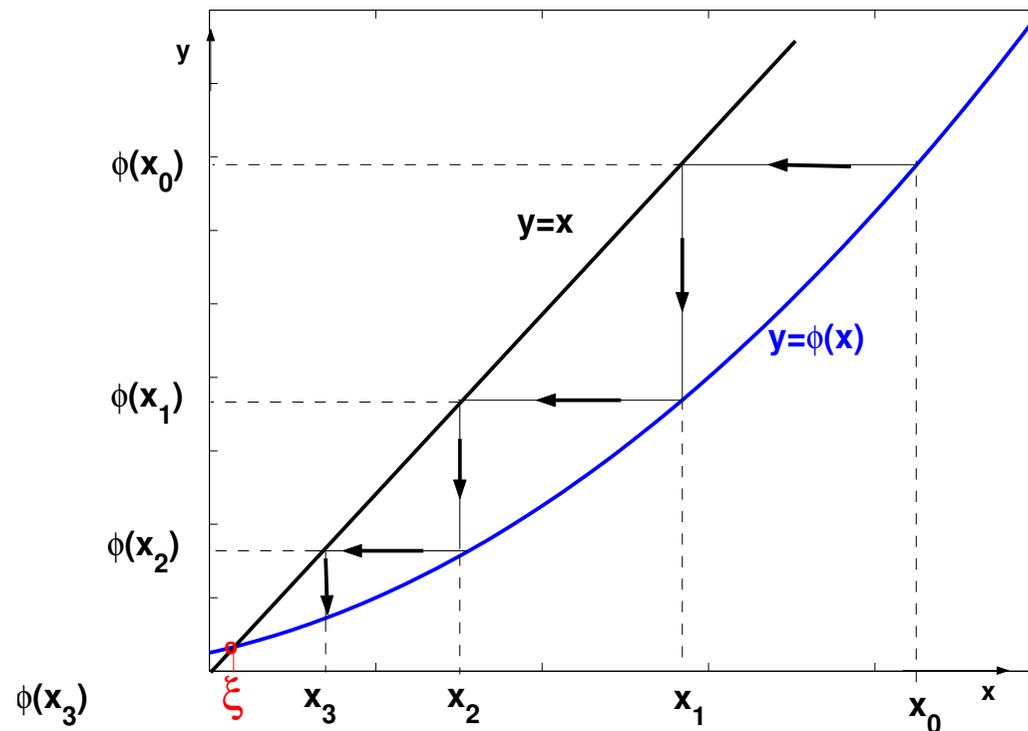


$$-1 < \varphi'(x) \leq 0$$

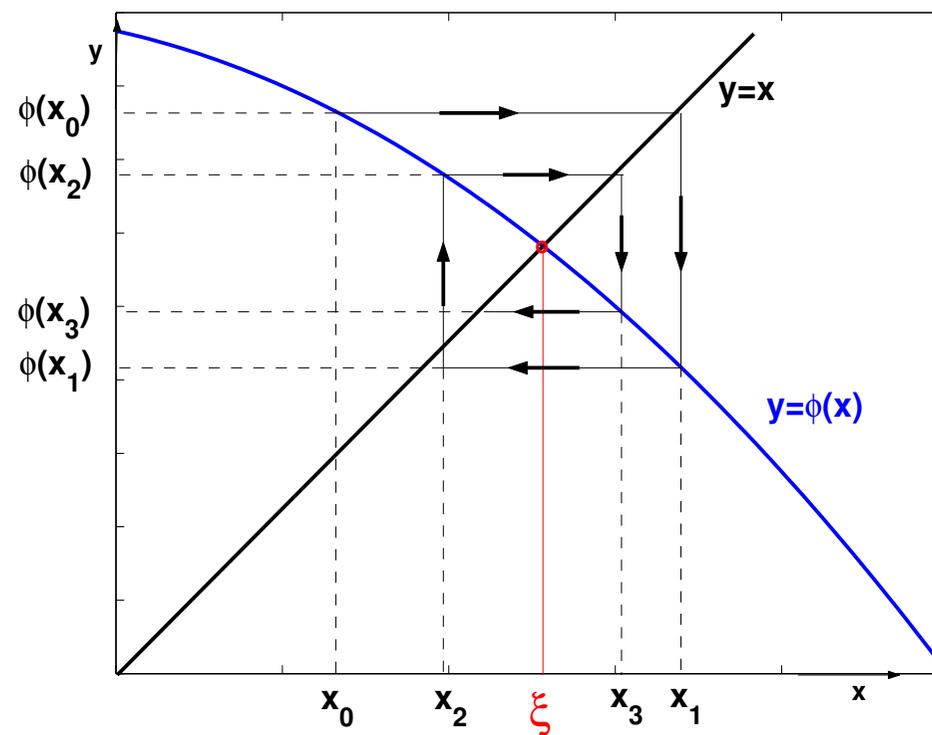
ad ogni iterazione l'errore diminuisce  
in valore assoluto ma non conserva il segno

# Proprietà della successione delle approssimazioni

- Se  $0 \leq \varphi'(x) < 1$  per  $x \in I$  la successione  $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , è **monotona crescente** (se  $e_0 > 0$ ) o **decescente** (se  $e_0 < 0$ )  $\Rightarrow$  le approssimazioni sono per **difetto** (se  $\xi > x_0$ ) o per **eccesso** (se  $\xi < x_0$ )



- Se  $-1 < \varphi'(x) \leq 0$  per  $x \in I$  la successione  $\{x_n = \varphi(x_{n-1})\}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , **non è monotona**  $\Rightarrow$  le approssimazioni sono **alternativamente** per **difetto** e per **eccesso**



# Ordine di convergenza

**Teorema 5.** Se

*i)*  $\varphi \in C^{\mathbf{p}}(I)$  con  $I$  intorno di un punto unito  $\xi$  di  $\varphi$

*ii)* la successione delle approssimazioni  $\{x_n\}$  è **convergente**

*iii)*  $\varphi(\xi) = \xi, \varphi^{(\nu)}(\xi) = 0 \quad \nu = 1, \dots, \mathbf{p} - 1$   
 $\varphi^{(\mathbf{p})}(\xi) \neq 0$

$\Rightarrow$  il metodo ha **ordine di convergenza  $p$**

# Esempi

- Se  $\varphi'(\xi) \neq 0 \Rightarrow p = 1$  la convergenza è **lineare**:

$$C = \varphi'(\xi) \leq k := \max_{x \in [a,b]} |\varphi'(x)| \quad \text{coefficiente di contrazione}$$

- Metodo delle tangenti:

$$\varphi_T(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

$$\varphi'_T(\xi) = \frac{f(\xi)f''(\xi)}{(f'(\xi))^2} = 0$$

$$\varphi''_T(\xi) = \frac{f''(\xi)}{f'(\xi)} \begin{cases} \neq 0 & \text{se } f''(\xi) \neq 0 \Rightarrow p = 2 \\ = 0 & \text{se } f''(\xi) = 0 \Rightarrow p > 2 \end{cases}$$

Se  $p = 2$  la convergenza è **quadratica**

# Criteri di arresto

Se  $k$  è il **coefficiente di contrazione** allora

$$(1) \quad |e_n| = |\xi - x_n| = |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| \leq k |\xi - x_{n-1}|$$

D'altra parte

$$\begin{aligned} |\xi - x_{n-1}| &= |\xi - x_n + x_n - x_{n-1}| \leq \\ &\leq |\xi - x_n| + |x_n - x_{n-1}| = \\ &= |\varphi(\xi) - \varphi(x_{n-1})| + |x_n - x_{n-1}| \leq \\ &\leq k |\xi - x_{n-1}| + |x_n - x_{n-1}| \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\xi - x_{n-1}| \leq \frac{1}{1-k} |x_n - x_{n-1}|$$

Sostituendo questa espressione in (1) si ha

$$\boxed{|e_n| \leq \frac{k}{1-k} |x_n - x_{n-1}|} \quad \text{Stima a posteriori}$$

Poichè

$$|e_n| \leq k|e_{n-1}| \leq k^2|e_{n-2}| \leq \dots \leq k^{n-1}|e_1| \leq k^{n-1} \frac{k}{1-k} |x_1 - x_0|$$

si ha

$ e_n  \leq \frac{k^n}{1-k}  x_1 - x_0  \leq \frac{k^n}{1-k} (b-a)$	<b>Stima a priori</b>
---	-----------------------

da cui è possibile dare una stima del numero di iterazioni  $N$  che garantisce  $|e_n| < \varepsilon$ , con  $\varepsilon$  fissata, come segue

$$N > \frac{\log \left( \frac{\varepsilon(1-k)}{b-a} \right)}{\log k}$$

# Esercizio

Stabilire se le funzioni

$$\varphi_1(x) = x^3 + 6x^2 + x - 8, \quad \varphi_2(x) = \sqrt{\frac{8}{x+6}}, \quad \varphi_3(x) = \sqrt{\frac{8-x^3}{6}}$$

generano un procedimento iterativo convergente alla radice dell'equazione non lineare  $x^3 + 6x^2 - 8 = 0$  contenuta nell'intervallo  $I = [1, 2]$ .

Per ognuna di esse caratterizzare la convergenza (ordine, monotonia, scelta dell'approssimazione iniziale).

**Soluzione** Osserviamo che  $\varphi_1(x) = x \iff x^3 + 6x^2 - 8 = 0$ . La stessa condizione è soddisfatta dalle funzioni  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$ .

Inoltre,  $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)$  sono funzioni continue e derivabili in  $I$ .

$\varphi_1$  non genera un procedimento iterativo convergente nell'intervallo dato in quanto

$$\varphi_1'(x) = 3x^2 + 12x + 1 > 1 \quad \forall x \in I$$

$$\varphi_2'(x) = -\frac{\sqrt{2}}{(x+6)\sqrt{x+6}} < 0 \quad \forall x \in I$$

ne segue che  $\varphi_2$  è monotona decrescente in  $I$  e quindi

$$\forall x \in I, \quad \varphi_2(1) \geq \varphi_2(x) \geq \varphi_2(2)$$

Poichè  $\varphi_2(1) = \sqrt{8/7} > 1$  and  $\varphi_2(2) = 1$ , si ha  $\varphi_2(I) \subset I$ .

Inoltre, si verifica facilmente che  $|\varphi_2'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$ .

Possiamo, dunque, concludere che  $\varphi_2$  genera un procedimento iterativo convergente allo zero di  $x^3 + 6x^2 - 8$  nell'intervallo  $I = [1, 2]$  per ogni scelta dell'approssimazione iniziale  $x_0 \in I$ .

Inoltre, poichè  $\varphi_2' \neq 0 \quad \forall x \in I$ , l'ordine di convergenza è lineare ( $p = 1$ ) e la convergenza non è monotona in quanto  $\varphi_2' < 0 \quad \forall x \in I$ . Infine il fattore di convergenza è  $k_2 = \max_{x \in I} |\varphi_2'(x)| = |\varphi_2'(1)| = \frac{\sqrt{2}}{7\sqrt{7}}$ .

Cosa si può dire di  $\varphi_3$ ?

Mostrare che  $\varphi_3$  non genera un procedimento convergente in  $I$  ma lo genera in  $I_1 = [1, 1.15]$  e la convergenza è lineare e non monotona. Scegliendo  $x_0 = 1.15$ , stabilire quale tra i procedimenti generati da  $\varphi_2$  e  $\varphi_3$  in  $I_1$  converge più velocemente.

### Suggerimento:

- Calcolo della derivata manualmente (o usando `diff`)
- Grafico della  $\varphi'_3$  mediante `fplot` in  $[1, 2]$
- Grafico contemporaneo di  $\varphi'_2$  e  $\varphi'_3$

**Cenni sulla soluzione di**

**Sistemi non lineari**

# Sistemi di equazioni non lineari

Un **sistema di equazioni non lineari**,  $F(X) = 0$ , può essere scritto nella forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{array} \right.$$

con  $F(X) = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T$  e  $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ .

La **soluzione** del sistema è il vettore  $\Xi = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$  le cui componenti **annullano simultaneamente** le  $n$  equazioni del sistema.

Supporremo che le funzioni  $f_i : D \subset \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, \dots, n$ , siano almeno **continue** in  $D$

# Metodo del punto unito in $\mathbb{R}^n$

Si scrive il sistema

$$F(X) = 0$$

nella forma equivalente

$$X = \Phi(X)$$

con  $\Phi = [\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_n(X)]^T$

Se  $\Xi \in \mathbb{R}^n$  è **radice** di  $F$  allora è **punto unito** di  $\Phi$ :

$$F(\Xi) = 0 \Leftrightarrow \Xi = \Phi(\Xi)$$

# Metodo del punto unito in $\mathbb{R}^n$

$$X = \Phi(X) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ x_2 = \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}$$

e quindi

$$\Xi = \Phi(\Xi) \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1 = \varphi_1(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \xi_2 = \varphi_2(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \xi_n = \varphi_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{cases}$$

# Metodo del punto unito

Il **punto unito**  $\Xi = \Phi(\Xi)$ ,  $\bar{X} = [\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n]^T$ , può essere **approssimato** generando la successione

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} \text{ dato} \\ X^{(k)} = \Phi(X^{(k-1)}) \\ k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T \text{ dato} \\ x_1^{(k)} = \varphi_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \varphi_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = \varphi_n(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \end{array} \right.$$

Le funzioni  $\varphi_i$  sono chiamate **funzioni di iterazione**.

# Convergenza

Per poter definire la **convergenza** di un metodo iterativo dobbiamo prima di tutto definire l'**errore di troncamento**

**Errore di troncamento:**  $E^{(k)} = \bar{X} - X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

$\swarrow$   $\searrow$

**soluzione esatta** **soluzione approssimata**

Per "*misurare*" la lunghezza di un vettore  $V \in \mathbb{R}^n$  si ricorre alla **norma di vettore**:

$$\|V\| = \left( \sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

**Convergenza:**  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$

Se il metodo iterativo è **convergente**, in assenza di errori di arrotondamento si ottiene la **soluzione esatta** dopo un **numero infinito** di passi.

**Nota.** In pratica ci si arresta quando  $\|E^{(k)}\| \leq \epsilon$  (**criterio di arresto**)

# Norma di vettore

La **norma** di un vettore  $V = [v_1, \dots, v_n]^T$  viene utilizzata per "*misurare*" la sua **lunghezza**.

**Intorno:**  $\|V - W\| \leq r$

● **Norma due o euclidea:**  $\|V\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}$

● **Norma uno:**  $\|V\|_1 := \sum_{i=1}^n |v_i|$

● **Norma infinito:**  $\|V\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |v_i|$

**Nota.** Tutte le norme sono **equivalenti**:  $m\|V\|_p \leq \|V\|_q \leq M\|V\|_p$

# Proprietà della norma di vettore

- $\|V\| \geq 0, \quad \|V\| = 0 \iff V = 0$
- $\|\alpha V\| = |\alpha| \cdot \|V\| \quad \forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall V \in \mathbf{R}^n$
- $\|V + W\| \leq \|V\| + \|W\| \quad \forall V, W \in \mathbf{R}^n \quad (\text{disuguaglianza triangolare})$

**Distanza:** in uno **spazio vettoriale normato**  $S$  è possibile introdurre la **distanza** tra due punti  $V$  e  $W$  in  $S$

$$d(V, W) := \|V - W\|$$

**Proprietà della distanza:**

- $d(V, W) = 0 \iff V = W$
- $d(V, W) = d(W, V) \quad \forall V, W \in S$
- $d(V, W) \leq d(V, Z) + d(Z, W) \quad \forall V, W, Z \in S$

# Norme di matrici

La **norma** di una matrice  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  soddisfa le seguenti

## Proprietà

- $\|A\| \geq 0$ ,  $\|A\| = 0 \iff A = 0$
- $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$ ,  $\forall \alpha \in \mathbf{R}, \forall A \in \mathbf{R}^{n \times n}$
- $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$ ,  $\forall A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  (*disuguaglianza triangolare*)
- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$ ,  $\forall A, B \in \mathbf{R}^{n \times n}$  (*sub-moltiplicatività*)

**Definizione.** Una matrice si dice **convergente** se  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$

# Norme indotte dalla norma di vettore

Ogni **norma di vettore** può essere utilizzata per definire una **norma di matrice** che permette di "*misurare*" come la matrice agisce sui vettori:

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n} \quad X \in \mathbf{R}^n$$

Le norme indotte soddisfano tutte le **proprietà delle norme** e, inoltre, soddisfano la **relazione di compatibilità** :

$$\|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\|$$

Infatti, se  $X \neq 0$ , si ha

$$\|A\| = \max_{\|X\|=1} \|AX\| = \max_{\|X\| \neq 0} \left\| \frac{AX}{\|X\|} \right\| = \max_{\|X\| \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|} \implies \|A\| \geq \frac{\|AX\|}{\|X\|}$$

**Nota.** Per tutte le norme indotte si ha  $\|I\| = 1$  ( $I$ : matrice identità )

# Norme indotte: esempi

- **Norma uno:**  $\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  (per colonne)
- **Norma infinito:**  $\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$  (per righe)
- **Norma due o spettrale:**  $\|A\|_2 := \sqrt{\rho(A^T A)}$

dove  $\rho(M) := \max_i |\lambda_i|$  ( $\lambda_i$ : autovalori di  $M$ ) è il **raggio spettrale** della matrice  $M \in \mathbf{R}^{n \times n}$ .

Se  $A$  è **simmetrica**  $\implies \rho(A^T A) = \rho^2(A) \implies \|A\|_2 = \rho(A)$

Autovalori

Norma uno

# Convergenza: condizione necessaria

Tramite la **norma di vettore** si può "misurare" la **lunghezza** del vettore errore di troncamento, cioè la **distanza** tra la soluzione esatta e quella approssimata.

$$\text{Convergenza: } \lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$$

**Teorema.** Sia  $S$  uno **spazio vettoriale normato** e sia  $\Phi : S \rightarrow S$ . Se la successione  $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$  è **convergente** a un valore  $\bar{X} \in S$  e l'applicazione  $\Phi$  è **continua** in  $\bar{X} \Rightarrow \bar{X}$  è **punto unito** di  $\Phi$ , cioè  $\bar{X} = \Phi(\bar{X})$ .

**Dim.**

$$\bar{X} = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(X^{(k-1)}) = \Phi\left(\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k-1)}\right) = \Phi(\bar{X})$$

# Convergenza: condizione sufficiente

**Definizione.** Un'applicazione  $\Phi : S \rightarrow S$ , dove  $S$  è uno **spazio normato** è detta **contrazione**, se esiste  $\lambda \in (0, 1)$  tale che

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \lambda \|X - Y\| < \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in S$$

**Teorema.** Sia  $D \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $\Phi : D \rightarrow D$  è una **contrazione**

$\Rightarrow$  • esiste un **unico punto unito**  $\bar{X} \in D$  di  $\Phi$

- la successione  $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$  è **convergente** a  $\bar{X}$  per ogni **approssimazione iniziale**  $X^{(0)} \in D$

# Contrazione: condizione sufficiente

Matrice Jacobiana di  $\Phi$

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

**Teorema.** Se *i)* le **funzioni di iterazione**  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  sono **continue** e **parzialmente derivabili** in  $D$ ;

*ii)* esiste  $\lambda \in (0, 1)$  tale che  $\|J(X)\| \leq \lambda$  per  $X \in D$

$\Rightarrow \Phi$  è una **contrazione** in  $D$

# Esempio

La condizione  $\|J(X)\| \leq \lambda$ ,  $X \in D$ , è **sicuramente verificata** se

$$\left| \frac{\partial \varphi_i(X)}{\partial x_k} \right| \leq M_{ik} \quad i, k = 1, \dots, n \quad X \in D$$

con

$$\|M\| \leq \lambda < 1 \quad \text{dove } M = [M_{ik}]_{i,k=1}^n$$

**Esempio:**  $n = 2$

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \varphi(x, y) \\ y = \psi(x, y) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |\varphi_x(X)| \leq M_{11} & |\varphi_y(X)| \leq M_{12} \\ |\psi_x(X)| \leq M_{21} & |\psi_y(X)| \leq M_{22} \end{cases}$$

$$M_{11} + M_{12} \leq \lambda < 1 \quad e \quad M_{21} + M_{22} \leq \lambda < 1$$

$$\|M\| \leq \lambda < 1 \Leftrightarrow \text{oppure } M_{11} + M_{21} \leq \lambda < 1 \quad e \quad M_{12} + M_{22} \leq \lambda < 1$$

$$\text{oppure } \sqrt{M_{11}^2 + M_{12}^2 + M_{21}^2 + M_{22}^2} \leq \lambda < 1$$

# Metodo di Newton per sistemi

Sistema non lineare:

$$F(X) = 0 \quad X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

Il **metodo di Newton** per la soluzione di sistemi non lineari si basa sulla **linearizzazione** della  $F(X) = [f_1(X), \dots, f_n(X)]^T$

Se le funzioni  $f_i(X)$  hanno **derivate parziali limitate**, allora si può sviluppare in **serie di Taylor** la funzione vettoriale  $F(X)$  scegliendo come punto iniziale  $X^{(k)}$

$$F(X) = F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)}) (X - X^{(k)}) + \dots$$

dove  $[J_F(X)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  è lo **giacobiano** della  $F(X)$

$$\Rightarrow F(X^{(k+1)}) \approx F(X^{(k)}) + J_F(X^{(k)}) (X^{(k+1)} - X^{(k)}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X^{(0)} & \text{dato} \\ X^{(k+1)} = X^{(k)} - [J_F(X^{(k)})]^{-1} F(X^{(k)}) & k \geq 0 \end{cases}$$

# Convergenza del metodo di Newton

Il **metodo di Newton** è un **metodo iterativo** la cui **funzione di iterazione** è  $\Phi(X) = X - [J_F(X)]^{-1} F(X)$

**Teorema.** Sia  $\bar{X}$  una soluzione del sistema non lineare  
$$F(X) = 0$$

con  $F \in C^2(I)$  ( $I \in \mathbf{R}^n$  intorno di  $\bar{X}$ ).

Sia  $\det J_F(X) \neq 0$  per  $X \in I$ .

$\Rightarrow$  **i)**  $\exists A \subseteq I$  tale che,  $\forall X^{(0)} \in A$ , la successione  $\{X^{(k+1)}\} = \{\Phi(X^{(k)})\}$  **converge** a  $\bar{X}$ ;

**ii)** la convergenza è **quadratica**:  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|E^{(k+1)}\|}{\|E^{(k)}\|^2} > 0$ .

# Osservazioni sul metodo di Newton per sistemi

- La **convergenza** del metodo è legata all'**accuratezza** dell'**approssimazione iniziale**.
- Ad ogni passo bisogna verificare che  $\det J_F(X^{(k)}) \neq 0$ . Nella pratica, si può avere **instabilità** numerica se  $\det J_F(X^{(k)})$  è "**piccolo**" → conviene utilizzare una **precisione elevata**.

- Poiché il **costo computazionale** del calcolo dell'inversa  $[J_F(X^{(k)})]^{-1}$  può essere **elevato**, si preferisce risolvere ad ogni passo il sistema lineare

$$J_F(X^{(k)})Y = -F(X^{(k)}) \Rightarrow X^{(k+1)} = X^{(k)} + Y$$

- **Criterio di arresto**: il procedimento iterativo viene arrestato quando  $\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \leq \epsilon$ .
- A volte si preferisce ricalcolare  $J_F(X^{(k)})$  non ad ogni iterazione ma **dopo 3-4 iterazioni** (metodi di tipo quasi-Newton).

# Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

$$\text{Per } n = 2 \text{ si ha: } \begin{cases} f(X) = f(x, y) = 0 \\ g(X) = g(x, y) = 0 \end{cases}$$

**Formula di Taylor** di punto iniziale  $X^{(k)} = [x_k, y_k]^T$ :



$$\begin{cases} f(X) = f(X^{(k)}) + f_x(X^{(k)})(x - x_k) + f_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_1 = 0 \\ g(X) = g(X^{(k)}) + g_x(X^{(k)})(x - x_k) + g_y(X^{(k)})(y - y_k) + R_2 = 0 \end{cases}$$

dove  $R_1 = R_1(X, X^{(k)})$ ,  $R_2 = R_2(X, X^{(k)})$  rappresentano il **resto**.

La **soluzione approssimata** del sistema non lineare è la soluzione del **sistema lineare** che si ottiene trascurando il resto nello sviluppo precedente.

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

# Metodo di Newton per sistemi: $n = 2$

$$\begin{cases} f_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + f_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -f(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)})(x_{k+1} - x_k) + g_y(X^{(k)})(y_{k+1} - y_k) = -g(X^{(k)}) \end{cases}$$

$$\Downarrow \\ J_F^{(k)}(X^{(k+1)} - X^{(k)}) = -F(X^{(k)})$$

dove  $J_F^{(k)} := J_F(X^{(k)}) = \begin{bmatrix} f_x(X^{(k)}) & f_y(X^{(k)}) \\ g_x(X^{(k)}) & g_y(X^{(k)}) \end{bmatrix}$

Il **sistema lineare** ammette soluzione se

$$|J_F^{(k)}| = \det J_F^{(k)} \neq 0$$

La soluzione è

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - \frac{1}{|J_F^{(k)}|} [f(X^{(k)})g_y(X^{(k)}) - g(X^{(k)})f_y(X^{(k)})] \\ y_{k+1} = y_k - \frac{1}{|J_F^{(k)}|} [g(X^{(k)})f_x(X^{(k)}) - f(X^{(k)})g_x(X^{(k)})] \end{cases}$$

## Esempio

Determinare i punti di intersezione tra il cerchio  $x^2 + y^2 = 3$  e l'iperbole  $xy = 1$  con 3 decimali esatti.

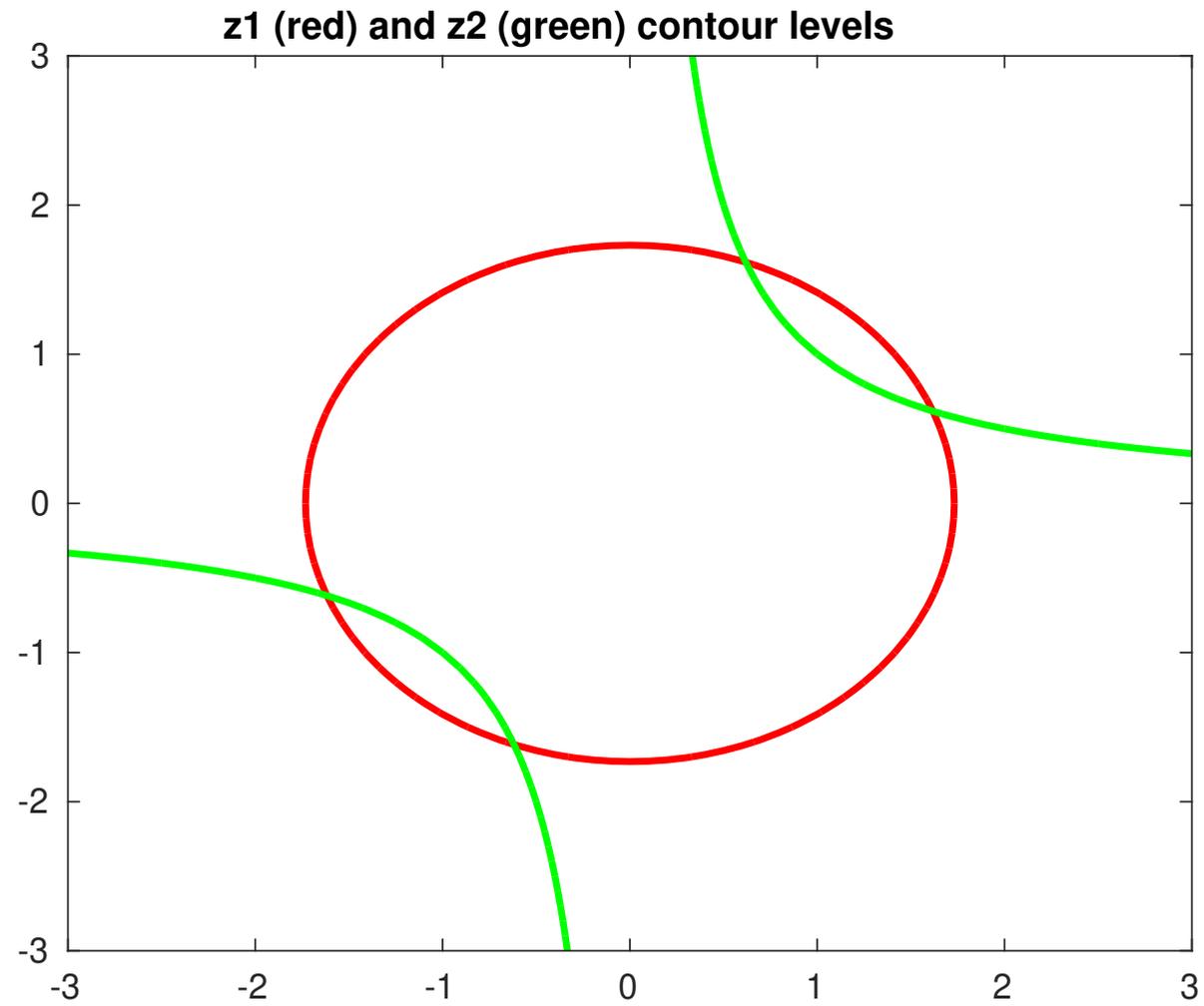
### Soluzione

Si devono trovare i punti che annullano simultaneamente le funzioni  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 3$  e  $g(x, y) = xy - 1$ .

Si tratta quindi di risolvere il **sistema non lineare**

$$\begin{cases} f(x, y) = x^2 + y^2 - 3 = 0 \\ g(x, y) = xy - 1 = 0 \end{cases}$$

## Separazione grafica:



Le due funzioni hanno 4 punti di intersezione: 2 nel primo quadrante e 2 nel terzo.

Ne segue che, detti  $\xi_1 = (x_1, y_1)$  e  $\xi_2 = (x_2, y_2)$  i punti di intersezione nel primo quadrante, i rimanenti due sono:

$$\xi_3 = (-x_1, -y_1) \quad \text{e} \quad \xi_4 = (-x_2, -y_2).$$

Inoltre, se il punto di coordinate  $(x_1, y_1)$  è uno zero sia di  $f$  che di  $g$ , lo è anche il punto di coordinate  $(y_1, x_1)$ . Ne segue che

$$\xi_2 = (x_2, y_2) = (y_1, x_1).$$

Il punto  $\xi_1 = (x_1, y_1)$  è contenuto in  $I_1 = [0, 1[ \times [1, \sqrt{3}]$ .

Si verifica facilmente che  $F(x, y) = [f(x, y), g(x, y)]^T \in C^2(I_1)$ .

Inoltre

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ y & x \end{bmatrix}$$

e quindi

$$|J_F(x, y)| = 2x^2 - 2y^2 = 0 \iff x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow |J_F(x, y)| \neq 0 \text{ in } I_1.$$

Sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**

Scegliendo il punto  $X^{(0)} = (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$  come approssimazione iniziale della soluzione si ha

$$\begin{cases} x_1 = x_0 - \frac{1}{|J_F(x_0, y_0)|} [f(x_0, y_0) g_y(x_0, y_0) - g(x_0, y_0) f_y(x_0, y_0)] \\ y_1 = y_0 - \frac{1}{|J_F(x_0, y_0)|} [g(x_0, y_0) f_x(x_0, y_0) - f(x_0, y_0) g_x(x_0, y_0)] \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4} - 3\right) \frac{1}{2} - \left(\frac{13}{22} - 1\right) 2 \frac{3}{2} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \\ y_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} \left[ \left(\frac{3}{4} - 1\right) + \frac{1}{2} \frac{3}{2} \right] = \frac{3}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{8} \end{cases}$$

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty} = \max \left\{ \left| \frac{5}{8} - \frac{1}{2} \right|, \left| \frac{13}{8} - \frac{3}{2} \right| \right\} = 0.125 > 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_1 - 0.00694 = 0.61806 \\ y_2 = y_1 - 0.00694 = 1.61806 \end{cases}$$

$$\|X^{(2)} - X^{(1)}\|_{\infty} = \max \{|0.61806 - 0.625|, |1.61806 - 1.625|\} = 0.00694 > 0.5 \cdot 10^{-3}$$

$$\begin{cases} x_3 = x_2 - 0.00003 = 0.61803 \\ y_3 = y_2 - 0.00003 = 1.61803 \end{cases}$$

$$\|X^{(3)} - X^{(2)}\|_{\infty} = \max \{|0.61803 - 0.61806|, |1.61803 - 1.61806|\} = 0.00003 < 0.5 \cdot 10^{-3}$$

# Esercizio

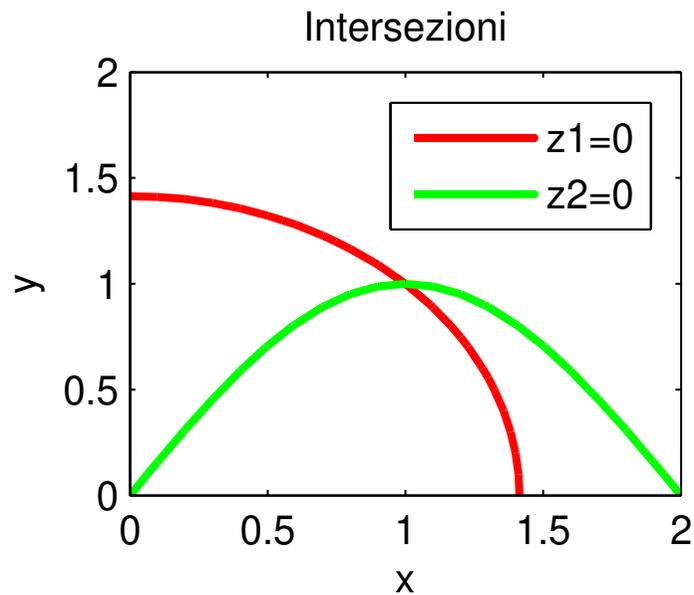
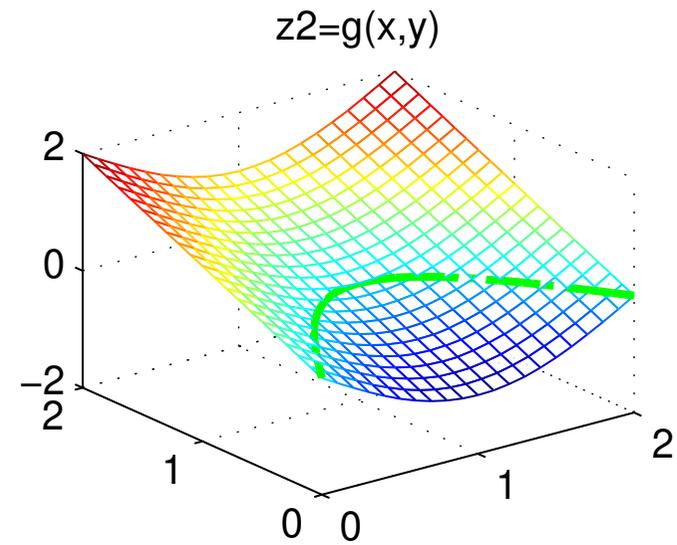
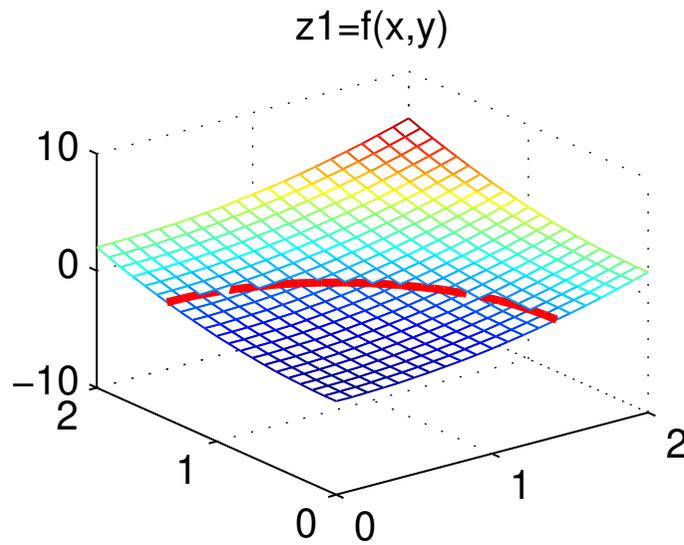
Dato il sistema non lineare

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ y - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0, \end{cases}$$

stabilire se il metodo di Newton è adatto ad approssimare la soluzione  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$ .

## Soluzione

E' necessario determinare un opportuno intervallo  $I$  in cui la soluzione  $(\bar{x}, \bar{y}) = (1, 1)$  del sistema sia unica. Disegnando il grafico delle due funzioni, limitandoci al primo quadrante, possiamo concludere che  $I = [0, \sqrt{2}] \times [0, \sqrt{2}]$  è un buon intervallo di separazione



Inoltre, le funzioni  $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2$  e  $g(x,y) = y - \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)$  sono

$C^2(I)$ , mentre la matrice Jacobiana

$$J_F(x, y) = \begin{bmatrix} f_x(x, y) & f_y(x, y) \\ g_x(x, y) & g_y(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 2y \\ -\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) & 1 \end{bmatrix}$$

è tale che

$$|J_F(x, y)| = 2x + \pi y \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \neq 0$$

in un intorno opportuno del punto  $(1, 1)$  contenuto in  $I$ ; infatti,

$$|J_F(1, 1)| = 2 + 0 > 0.$$

Possiamo concludere che sono verificate le ipotesi di applicabilità del **metodo di Newton**.

## Esercizio

Mostrare che risolvere il sistema precedente è equivalente a risolvere la seguente equazione non lineare:

$$x^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 2.$$

**Nota:** Si può risolvere usando il metodo di Newton-Raphson ! ! !

**F I N E**

# Autovalori

Sia  $\mathbf{A}$  una matrice quadrata di ordine  $n$ . Se esiste un numero (reale o complesso)  $\lambda$  e un vettore  $\mathbf{x}$  tali che

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x},$$

allora  $\lambda$  si dice *autovalore* di  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{x}$  è il corrispondente *autovettore*.

La relazione precedente può scriversi in forma equivalente come segue

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

e, poichè  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , il determinante della matrice del sistema deve essere nullo, cioè

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

E' possibile dimostrare che l'identità precedente è equivalente a

$$\lambda^n - \text{tr}(\mathbf{A})\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det(\mathbf{A}) = 0.$$

Il polinomio al primo membro si dice *polinomio caratteristico* e le sue radici sono gli autovalori di  $A$ . Inoltre

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

$$\prod_{i=1}^n \lambda_i = \det(A).$$

**Teorema.** Per una norma verificante la **relazione di compatibilità** si ha  $\rho(A) \leq \|A\|$ .

Infatti da  $\lambda X = AX \implies \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\| \cdot \|X\| \implies |\lambda| \leq \|A\|$ .

# Norme indotte: norma 1

• **Norma uno:**  $\|A\|_1 := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|$  (per colonne)

**dim:**  $\|A\|_1 = \max_{\|X\|_1=1} \|AX\|_1$ . Inoltre,  $\|X\|_1 = 1 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n |x_i| = 1$ .

La  $i$ -esima componente del vettore  $AX$  è  $(AX)_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|AX\|_1 &= \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \right| \leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{ij}x_j| = \sum_{j=1}^n |x_j| \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^n |x_j| \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \underbrace{\sum_{j=1}^n |x_j|}_1 = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right) \end{aligned}$$

Per dimostrare l'uguaglianza, indichiamo con  $h$  l'indice di colonna che realizza il massimo e con  $E_h$  il vettore della base canonica corrispondente, quindi  $\|E_h\|_1 = 1$ .

Considerando che il vettore  $AE_h = (0, 0, \dots, 0, a_{ih}, 0, \dots, 0)^T$ , si ha

$$\|AE_h\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_{ih}| = \max_j \left( \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \right)$$