

Metodi Matematici per l'Ingegneria (A.A. 2019-2020)

Sistemi lineari

Metodi iterativi

Docente: Domenico Vitulano

Email: domenico.vitulano@sbai.uniroma1.it

Ufficio: Via A. Scarpa,

Pal. B, I piano, Stanza n. 11

Tel. 06 49766555

Ricevimento: consultare la pagina web dedicata al corso

Testi consigliati:

Calcolo Numerico, L. Gori, Ed. Kappa, 2006

Esercizi di Calcolo Numerico, L. Gori-M.L. Lo Cascio, F. Pitolli, Ed. Kappa, 2007

Il materiale didattico è disponibile sui siti:

<https://www.sbai.uniroma1.it/vitulano-domenico/analisi-numerica/2019-2020>

<https://elearning.uniroma1.it/enrol/index.php?id=7967>

Sistemi lineari: Metodi iterativi

- la soluzione si ottiene tramite approssimazioni successive (**metodi del punto unito**)
- soluzione esatta si ottiene in un numero infinito di passi (**errore di troncamento**)
- bassa occupazione di memoria
- problemi 'sparsi' e/o di elevate dimensioni

Sistemi non lineari

$$F(X) = 0$$

$$X, F \in \mathbf{R}^n$$

$$\rightarrow F(X) = AX - B$$

Sistemi lineari

$$AX = B$$

$$X, B \in \mathbf{R}^n \quad A \in \mathbf{R}^{n \times n}$$



$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$F = [f_1(X), f_2(X), \dots, f_n(X)]^T$$

$$0 = [0, 0, \dots, 0]^T$$

$$\begin{cases} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$



$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$$

$$A = [a_{ij}]_{i,j=0}^n$$

$$B = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Metodo del punto unito

Sistemi non lineari

$$F(X) = 0 \Leftrightarrow X = \Phi(X) \text{ con } \Phi = [\varphi_1(X), \varphi_2(X), \dots, \varphi_n(X)]^T$$

Se $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ è **radice** di F allora è **punto unito** di Φ :

$$F(\bar{X}) = 0 \Leftrightarrow \bar{X} = \Phi(\bar{X})$$

Sistemi lineari

$$AX = B \Leftrightarrow X = CX + Q \text{ con } Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$$

$$C = [c_{ij}]_{i,j=0}^n$$

Se $\bar{X} \in \mathbb{R}^n$ è **soluzione** di $AX = B$ allora è **punto unito** di $\Phi = CX + Q$:

$$A\bar{X} = B \Leftrightarrow \bar{X} = C\bar{X} + Q$$

Metodi iterativi a un punto

Il **punto unito** $\bar{X} = \Phi(\bar{X})$, $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$, può essere **approssimato** generando la successione

$$\left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} \text{ dato} \\ X^{(k)} = \Phi(X^{(k-1)}) \\ k = 1, 2, \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}]^T \text{ dato} \\ x_1^{(k)} = \varphi_1(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ x_2^{(k)} = \varphi_2(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \\ \dots\dots\dots \\ x_n^{(k)} = \varphi_n(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, \dots, x_n^{(k-1)}) \end{array} \right.$$

Le funzioni φ_i sono chiamate **funzioni di iterazione**.

Metodi iterativi per sistemi lineari

Nel caso **lineare** il **punto unito** $\bar{X} = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n]^T$, può essere **approssimato** generando la successione

$$\begin{cases} X^{(k)} = \mathbf{C}X^{(k-1)} + Q & k = 1, 2, \dots \\ X^{(0)} \in \mathbf{R}^n & \text{dato} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_i^{(k)} = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j^{(k-1)} + q_i \quad i = 1, \dots, n$$

La matrice $\mathbf{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è chiamata **matrice di iterazione**.

Convergenza

Per poter definire la **convergenza** di un metodo iterativo dobbiamo prima di tutto definire l'**errore di troncamento**

Errore di troncamento: $E^{(k)} = \bar{X} - X^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

\swarrow \searrow

soluzione esatta **soluzione approssimata**

Per "*misurare*" la lunghezza di un vettore $V \in \mathbb{R}^n$ si ricorre alla **norma di vettore**:

$$\|V\| = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{1/p}$$

Convergenza: $\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$

Se il metodo iterativo è **convergente**, in assenza di errori di arrotondamento si ottiene la **soluzione esatta** dopo un **numero infinito** di passi.

Nota. In pratica ci si arresta quando $\|E^{(k)}\| \leq \epsilon$ (**criterio di arresto**)

Convergenza: condizione necessaria

Tramite la **norma di vettore** si può "misurare" la **lunghezza** del vettore errore di troncamento, cioè la **distanza** tra la soluzione esatta e quella approssimata.

$$\text{Convergenza: } \lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0 \iff \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \bar{X}$$

Teorema. Sia S uno **spazio vettoriale normato** e sia $\Phi : S \rightarrow S$. Se la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a un valore $\bar{X} \in S$ e l'applicazione Φ è **continua** in $\bar{X} \Rightarrow \bar{X}$ è **punto unito** di Φ , cioè $\bar{X} = \Phi(\bar{X})$.

Dim. 1

Convergenza: condizione sufficiente

Definizione. Un'applicazione $\Phi : S \rightarrow S$, dove S è uno **spazio normato** è detta **contrazione**, se esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che

$$\|\Phi(X) - \Phi(Y)\| \leq \lambda \|X - Y\| < \|X - Y\| \quad \forall X, Y \in S$$

Teorema. Sia $D \subset \mathbb{R}^n$. Se $\Phi : D \rightarrow D$ è una **contrazione**

\Rightarrow • esiste un **unico punto unito** $\bar{X} \in D$ di Φ

- la successione $\{X^{(k)}\} = \{\Phi(X^{(k-1)})\}$ è **convergente** a \bar{X} per ogni **approssimazione iniziale** $X^{(0)} \in D$

Contrazione: condizione sufficiente

Matrice Jacobiana di Φ

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

Teorema. Se *i)* le **funzioni di iterazione** $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ sono **continue** e **parzialmente derivabili** in D ;

ii) esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che $\|J(X)\| \leq \lambda$ per $X \in D$

$\Rightarrow \Phi$ è una **contrazione** in D

Dim. 2

Metodi iterativi per sistemi lineari: condizione sufficiente di convergenza

Matrice Jacobiana di $\Phi = \mathbf{C}X + Q$

$$J(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1(X)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_2(X)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \varphi_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \mathbf{C}$$

Corollario. Se esiste $\lambda \in (0, 1)$ tale che $\|\mathbf{C}\| \leq \lambda$
 $\Rightarrow \Phi$ è una **contrazione** per ogni X
 \Rightarrow il metodo iterativo è **convergente**

Dim. 3

Condizione sufficiente di convergenza

Teorema. Condizione sufficiente affinché un metodo iterativo sia **convergente** a \bar{X} per **qualunque scelta** del vettore iniziale $X^{(0)}$, è che

$$\|C\| < 1$$

Dim. 4

Condizione necessaria e sufficiente di convergenza

Definizione. Una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ si dice **convergente** se $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$
(o, in modo equivalente, se $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k\| = 0$)

Teorema. Una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è **convergente** se e solo se $\rho(A) < 1$

Dim. 5

Teorema. Un metodo iterativo **converge** per **qualunque scelta** del vettore iniziale $X^{(0)}$, **se e solo se**

$$\rho(C) < 1$$

dove $\rho(C) = \max_{1 \leq i \leq n} |\lambda_i|$ è il **raggio spettrale** della matrice di iterazione C

Dim. 6

Criterio d'arresto

Se il metodo iterativo è **convergente**, si arresta il procedimento quando

$$\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| < \varepsilon \quad \varepsilon: \text{tolleranza prefissata}$$

Stima a priori: il numero di iterazioni K necessario affinché

$\|E^{(K)}\| < \varepsilon$, è dato da:

$$K > \log \left(\frac{(1 - \|C\|) \varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|} \right) \frac{1}{\log \|C\|}$$

Dim. 7

Velocità asintotica di convergenza

Se $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ è una **matrice convergente**, vale la proprietà

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{\|A^k\|} = \rho(A)$$

Dalla relazione

$$\|E^{(k)}\| \leq \|C^k\| \cdot \|E^{(0)}\|$$

per k "grande" si ottiene

$$\frac{\|E^{(k)}\|}{\|E^{(0)}\|} \leq \|C^k\| \approx \rho^k(C)$$

⇒ L'errore si riduce di un fattore 10^{-m} all'iterazione

$$K \simeq -\frac{m}{\text{Log } \rho(C)}$$

Velocità asintotica di convergenza: $V = -\text{Log } \rho(C)$

Esercizio 1

Data la matrice di iterazione $C(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & \beta & -\frac{\beta}{2} \\ 0 & \beta & -\frac{\beta}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, $\beta \in \mathbf{R}$, e il vettore $Q = (7/8, 7/8, -1/2)^T$,

1.1) determinare per quali valori di β il procedimento iterativo

$$\begin{cases} X^{(k+1)} = C(\beta)X^{(k)} + Q, & k = 0, 1, \dots & X^{(k)} \in \mathbf{R}^3 \\ X^{(0)} \text{ dato} \end{cases}$$

risulta **sicuramente convergente**;

1.2) posto $\beta = 1/2$, $X^{(0)} = (0, 0, 0)^T$, dare una stima del numero di iterazioni necessarie affinché l'approssimazione abbia 5 decimali esatti.

Traccia della soluzione

1.1) Condizione sufficiente di convergenza: $\|C\|_1 < 1$ oppure $\|C\|_\infty < 1$

$$\|C\|_1 = \max\left(2|\beta| + \frac{1}{2}, |\beta| + \frac{1}{4}\right) = 2|\beta| + \frac{1}{2} \quad \|C\|_1 < 1 \Rightarrow |\beta| < \frac{1}{4}$$

$$\|C\|_\infty = \max\left(\frac{3}{2}|\beta|, \frac{3}{4}\right) = \begin{cases} \frac{3}{4} & |\beta| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2}|\beta| & |\beta| > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \|C\|_\infty < 1 \Rightarrow |\beta| < \frac{2}{3}$$

Attenzione: le condizioni su β sono diverse a seconda della norma che si sceglie.

$$1.2) \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \|C(\frac{1}{2})\|_1 = \frac{3}{2} > 1 \quad \|C(\frac{1}{2})\|_\infty = \frac{3}{4} < 1$$

Attenzione: in **norma uno** non si può stabilire se il metodo converge, si ha invece convergenza in **norma infinito**.

Quindi:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\|_\infty = 0$$

$$K > \log \left(\frac{(1 - \|C(\frac{1}{2})\|_\infty)\varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty} \right) \frac{1}{\log \|C(\frac{1}{2})\|_\infty}$$

$$\|C(\frac{1}{2})\|_\infty = \frac{3}{4}, \quad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_\infty = \|Q\|_\infty = \max |q_i| = \frac{7}{8}, \quad \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$$

$$\Rightarrow K \geq 47$$

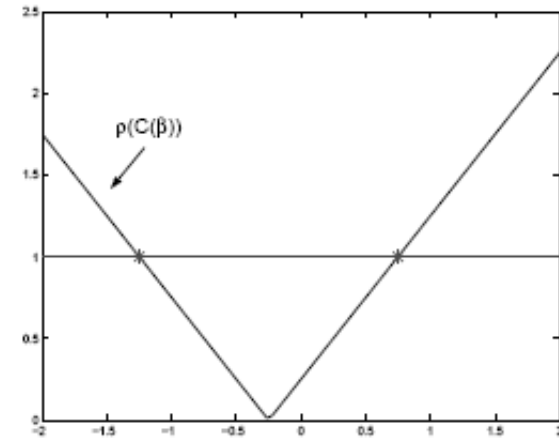
Condizione necessaria e sufficiente di convergenza:

$$\rho(C(\beta)) < 1$$

Autovalori di $C(\beta)$: 0 con molteplicità 2, $\frac{1}{4} + \beta$

Raggio spettrale di $C(\beta)$: $\rho(C(\beta)) = \left| \frac{1}{4} + \beta \right|$

$$\rho(C(\beta)) < 1 \Rightarrow \boxed{-\frac{5}{4} < \beta < \frac{3}{4}}$$



Velocità di convergenza: $V(\beta) = -\text{Log}(\rho(C(\beta))) = -\text{Log} \left| \frac{1}{4} + \beta \right|$

Nota: questo intervallo di β **contiene** entrambi gli intervalli trovati con la condizione sufficiente.

Esercizio 2

Supponendo di applicare il metodo iterativo

$$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \beta(AX^{(k)} - B)$$

al sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

determinare un intervallo di valori di β per il quale il metodo sia convergente e calcolare in funzione di β la costante di contrazione in una norma a scelta.

Soluzione

Il metodo iterativo si può riscrivere come

$$X^{(k+1)} = (I + \beta A)X^{(k)} - \beta B$$

con matrice di iterazione è $C = I + \beta A$, cioè

$$C = \begin{pmatrix} 1 + 2\beta & \beta \\ \beta & 1 + 2\beta \end{pmatrix}$$

Poichè C è simmetrica, $\|\cdot\|_\infty = \|\cdot\|_1$.

Condizione sufficiente per la convergenza

$$\|C\|_\infty = |1 + 2\beta| + |\beta| < 1 \Leftrightarrow \beta \in \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$$

Condizione necessaria e sufficiente per la convergenza $\rho(C) < 1$, cioè

$$\det \begin{pmatrix} 1 + 2\beta - \lambda & \beta \\ \beta & 1 + 2\beta - \lambda \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1 + 2\beta - \lambda)^2 - \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 2\lambda(1 + 2\beta) + (1 + 2\beta)^2 - \beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = (1 + 2\beta) \pm \sqrt{(1 + 2\beta)^2 - (1 + 2\beta)^2 + \beta^2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_{1,2} = 1 + 2\beta \pm \beta.$$

I due autovalori di C sono $\lambda_1 = 1 + \beta$ e $\lambda_2 = 1 + 3\beta$ da cui

$$\rho(C) = \max\{|1 + \beta|, |1 + 3\beta|\} < 1 \Leftrightarrow \beta \in \left(-\frac{2}{3}, 0\right)$$

Costruzione di metodi iterativi

$$AX = B \quad \longrightarrow \quad X = CX + Q$$

Splitting di A : $A = M + N$ dove M è una matrice **invertibile**.

$$AX = B \rightarrow (M + N)X = B \rightarrow MX = -NX + B \rightarrow$$

$$\rightarrow X = -M^{-1}NX + M^{-1}B \Rightarrow \boxed{C = -M^{-1}N \quad Q = M^{-1}B}$$

Una possibile **decomposizione** di A è

$$\boxed{A = L + D + U}$$

dove $D = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ (elementi **diagonali** di A)

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

(elementi di A al di **sotto**
della diagonale principale)

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(elementi di A al di **sopra**
della diagonale principale)

Metodo di Jacobi

$$M = D, N = L + U$$

$$\begin{cases} C_J = -D^{-1}(L + U) \\ Q_J = D^{-1}B \end{cases}$$

$$C_J = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad Q_J = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

Algoritmo J

$$X^{(k)} = C_J X^{(k-1)} + Q_J \Rightarrow x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; k \geq 0$$

Infatti, D^{-1} è una matrice diagonale i cui elementi diagonali sono $\frac{1}{a_{ii}}$, $i = 1, \dots, n$, mentre la matrice $(L + U)$ ha gli elementi sulla diagonale principale tutti uguali a 0.

Moltiplicare a sinistra la matrice $(L + U)$ per D^{-1} , corrisponde a dividere ogni elemento della i -esima riga di $(L + U)$ per $\frac{1}{a_{ii}}$

Metodo di Gauss-Seidel

$$M = D + L, \quad N = U \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_{GS} = -(D + L)^{-1}U \\ Q_{GS} = (D + L)^{-1}B \end{cases}$$

$$X^{(k)} = C_{GS}X^{(k-1)} + Q_{GS}$$



Algoritmo GS

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i \right)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad k \geq 0$$

Infatti, riscrivendo $X^{(k+1)} = C_{GS}X^{(k)} + Q_{GS}$ come $(L + D)X^{(k+1)} = -UX^{(k)} + B$ e considerando che $D + L$ è una matrice triangolare inferiore mentre U è triangolare superiore con elementi nulli sulla diagonale principale, si ha

$$\sum_{j=1}^i a_{ij} x_j^{(k+1)} = -\sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} + b_i.$$

L' **algoritmo GS** si ottiene, quindi, isolando la componente $x_i^{(k+1)}$ al primo membro.

Convergenza dei metodi di Jacobi e Gauss-Seidel

- Per **verificare** la convergenza si possono applicare alle matrici di iterazione C_J e C_{GS} le condizioni già viste:

$$\begin{cases} \text{C.S.:} & \|C_J\|_1, \|C_J\|_\infty < 1 \text{ e } \|C_{GS}\|_1, \|C_{GS}\|_\infty < 1 \\ \text{C.N.S.:} & \rho(C_J) < 1 \text{ e } \rho(C_{GS}) < 1 \end{cases}$$

Attenzione: Le **condizioni di convergenza** per le matrici di iterazione C_J e C_{GS} vanno **verificate** di volta in volta.

- Per alcune matrici A potrebbe convergere **solo uno** dei due metodi.
- Se convergono entrambi i metodi, quello di **Gauss-Seidel** converge **più velocemente**.

Esercizio

Dato il sistema lineare $AX = B$ dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = (1, 0, 0)^T,$$

1.1) verificare quale tra i metodi di Jacobi e Gauss-Seidel risulta convergente;

1.2) approssimare la soluzione del sistema lineare con 6 decimali esatti.

Traccia della soluzione

$$\mathbf{1.1)} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$C_J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad C_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Entrambe le matrici hanno norma **maggiore di 1**, quindi la **condizione sufficiente** di convergenza **non è soddisfatta**. Per verificare se è soddisfatta la **condizione necessaria e sufficiente** bisogna calcolare il **raggio spettrale** delle matrici di iterazione.

Autovalori di C_J : 0 con molteplicità 3

$\Rightarrow \rho(C_J) = 0 \Rightarrow$ il metodo di Jacobi **converge**

Autovalori di C_{GS} : 0 con molteplicità 1, 2 con molteplicità 2

$\Rightarrow \rho(C_{GS}) = 2 \Rightarrow$ il metodo di Gauss-Seidel **non converge**

1.2) Per approssimare la soluzione del sistema lineare con **6 decimali esatti**, si può utilizzare il **metodo di Jacobi** arrestando le iterazioni quando

$$\|E^{(k+1)}\| \simeq \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| \leq 0.5 \cdot 10^{-6} \text{ (criterio di arresto)}$$

Iterazioni

$$X^{(0)} = Q_J = D^{-1}B = (1, 0, 0)^T$$

$$X^{(1)} = C_J X^{(0)} + Q_J = (1, -2, -2)^T \quad \|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty} = 2$$

$$X^{(2)} = C_J X^{(1)} + Q_J = (-1, 2, 0)^T \quad \|X^{(2)} - X^{(1)}\|_{\infty} = 4$$

$$X^{(3)} = C_J X^{(2)} + Q_J = (-1, 2, 0)^T \quad \|X^{(3)} - X^{(2)}\|_{\infty} = 0$$

Nota 1. In questo caso la soluzione è **esatta**.

Nota 2. La **velocità di convergenza** è $V_J = -\text{Log}(\rho(C_J)) = \infty$.

Convergenza per matrici A con struttura speciale

Matrici diagonalmente dominanti:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(diagonale dominante per righe)

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ji}| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

(diagonale dominante per colonne)

Condizione sufficiente di convergenza:

Teorema. Se A è **diagonalmente dominante** per righe o per colonne, i **metodi di Jacobi** e **Gauss-Seidel** sono entrambi **convergenti** per qualunque scelta dell'approssimazione iniziale $X^{(0)}$.

Per esempio, se A è **diagonalmente dominante per righe** si ha

$$\|C_J\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left| -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}| \right) \frac{1}{|a_{ii}|} < 1$$

Matrici (simmetriche) definite positive:

Una matrice quadrata $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ **simmetrica** è **definita positiva** se

$$X^T A X = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j > 0 \quad \forall X \in \mathbf{R}^n$$

Per riconoscere se una matrice è definita positiva si può usare il **criterio di Sylvester**:

Affinché una matrice $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ **simmetrica** sia **definita positiva**, è **necessario e sufficiente** che

$$\det A_k > 0 \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

dove A_k sono le **sottomatrici principali di testa** di A .

Condizione sufficiente di convergenza:

Teorema. Se A è (simmetrica) **definita positiva**, il **metodo di Gauss-Seidel** è **convergente** per qualunque scelta dell'approssimazione iniziale $X^{(0)}$.

Esercizio

Dato il sistema

$$\begin{cases} 10x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + \beta x_3 = 3 \end{cases}$$

dipendente dai parametri α e β . Stabilire per quali valori dei parametri α e β i metodi iterativi di **Jacobi** e **Gauss-Seidel** convergono sicuramente per ogni scelta del vettore iniziale $\mathbf{X}^{(0)}$.

Condizione sufficiente perchè un metodo iterativo converga rispetto ad una norma di matrici $\|\cdot\|$ è che la norma della matrice di iterazione C sia strettamente minore di 1, cioè $\|C\| < 1$.

Sia $A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 2 & 1 & \beta \end{pmatrix}$ la matrice dei coefficienti del sistema,

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

allora la matrice di iterazione del metodo di Jacobi C_J è data da

$$C_J = -D^{-1}(L + U),$$

cioè

$$C_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{\alpha} & 0 & -\frac{1}{\alpha} \\ -\frac{2}{\beta} & -\frac{1}{\beta} & 0 \end{pmatrix}$$

con $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

Considerando la $\|\cdot\|_\infty$ risulta

$$\|C_J\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{10}, \frac{2}{|\alpha|}, \frac{3}{|\beta|}\right\} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{|\alpha|} < 1 \quad \wedge \quad \frac{3}{|\beta|} < 1,$$

cioè

$$|\alpha| > 2 \quad \wedge \quad |\beta| > 3.$$

Si osserva che alla stessa conclusione si giunge imponendo che la matrice A del sistema sia a **diagonale dominante per righe**.

Considerando, invece, la $\|\cdot\|_1$ risulta

$$\|C_J\|_1 = \max\left\{\frac{1}{|\alpha|} + \frac{2}{|\beta|}, \frac{1}{10} + \frac{1}{|\beta|}, \frac{1}{10} + \frac{1}{|\alpha|}\right\} < 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{|\alpha|} + \frac{2}{|\beta|} < 1 \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{|\beta|} < 1 \\ \frac{1}{10} + \frac{1}{|\alpha|} < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|\beta| + 2|\alpha|}{|\alpha||\beta|} < 1 \\ |\beta| > \frac{10}{9} \\ |\alpha| > \frac{10}{9} \end{cases}$$

da cui $\frac{10}{3} < |\beta| + 2|\alpha| < |\alpha||\beta|$.

E' opportuno notare che in questo caso non si arriva alla stessa conclusione imponendo la dominanza diagonale per colonne.

Inoltre, scegliendo $\alpha = \frac{9}{4}$ e $\beta = \frac{13}{4}$ risulta $\|C_J\|_\infty < 1$ mentre $\|C_J\|_1 > 1$. Infatti,

$$\frac{13}{4} + 2\frac{9}{4} = \frac{31}{4} = 7.75 > \frac{9}{4} \frac{13}{4} = \frac{117}{16} \approx 7.3125.$$

In questo caso, per esempio, sono necessarie almeno

$$K = 184$$

iterazioni per ottenere un errore $\|E^{(K)}\|_\infty$ tra due approssimazioni successive inferiore a $0.5 \cdot 10^{-5}$ avendo scelto $\mathbf{x}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$ come approssimazione iniziale.

Infatti risulta

$$\|E^{(K)}\|_{\infty} < \varepsilon$$

quando

$$K > \log \left(\frac{(1 - \|C\|_{\infty}) \varepsilon}{\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty}} \right) \frac{1}{\log \|C\|_{\infty}}$$

dove $\|C\|_{\infty} = \frac{12}{13}$, $\varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$,

$$\|X^{(1)} - X^{(0)}\|_{\infty} = \|X^{(1)}\|_{\infty} = \|Q_J\|_{\infty} = \frac{12}{13}$$

e $Q = D^{-1}B = \left[\frac{b_1}{a_{11}} \quad \frac{b_2}{a_{22}} \quad \frac{b_3}{a_{33}} \right]^T = \left[\frac{2}{10} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{12}{13} \right]^T$,

con $B = [b_1 \quad b_2 \quad b_3]^T = [2 \quad 1 \quad 3]^T$ vettore dei termini noti del sistema.

Viceversa, se si pone $\alpha = 4$ e $\beta = 3$, il metodo di Jacobi non soddisfa la condizione sufficiente rispetto alla norma $\|\cdot\|_\infty$ mentre converge sicuramente rispetto alla norma $\|\cdot\|_1$. Inoltre

$$\|E^{(K)}\|_1 < 0.5 \cdot 10^{-5}$$

se

$$K > 166.03$$

avendo scelto $\mathbf{X}^{(0)} = [0 \quad 0 \quad 0]^T$

ed essendo $\|X^{(1)}\|_1 = \left\| \begin{bmatrix} \frac{2}{10} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T \right\|_1 = \frac{2}{10} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{47}{60}$

e $\|C\|_1 = \frac{11}{12}$

La matrice di iterazione del metodo di Gauss-Seidel è data da

$$C_{GS} = -(L + D)^{-1}U,$$

con

$$(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{10\alpha} & \frac{1}{\alpha} & 0 \\ \frac{1}{10\beta} \left(\frac{1}{\alpha} - 2\right) & -\frac{1}{\alpha\beta} & \frac{1}{\beta} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$C_{GS} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ 0 & \frac{1}{10\alpha} & -\frac{9}{10\alpha} \\ 0 & -\frac{1}{10\alpha\beta} + \frac{1}{5\beta} & \frac{9}{10\alpha\beta} + \frac{1}{5\beta} \end{pmatrix}.$$

$$\|C_{GS}\|_{\infty} = \max\left\{\frac{2}{10}, \frac{1}{|\alpha|}, \frac{|2\alpha - 1| + |9 + 2\alpha|}{10|\alpha||\beta|}\right\} < 1$$

se

$$\begin{cases} |\alpha| > 1 \\ |2\alpha - 1| + |9 + 2\alpha| < 10|\alpha||\beta| \end{cases}$$

Si osserva che $\alpha = \frac{9}{4}$ e $\beta = \frac{13}{4}$ soddisfano la condizione precedente.

Quindi il metodo di Gauss-Seidel sicuramente converge per ogni scelta dell'approssimazione iniziale.

Scegliendo $\mathbf{X}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0]^T$, sono necessarie

$$K = 16$$

affinchè $\|E^{(K)}\|_{\infty} < \varepsilon = 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Infatti, $\|C_{GS}\|_{\infty} = \frac{4}{9}$

mentre

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}^{(1)} - \mathbf{X}^{(0)}\|_{\infty} &= \|\mathbf{X}^{(1)}\|_{\infty} = \|\mathbf{Q}_{GS}\|_{\infty} = \\ &= \|(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{B}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 1 & 16 & 404 \\ 5 & 45 & 585 \end{bmatrix}^T \right\|_{\infty} = \frac{404}{585} \end{aligned}$$

dove

$$(L + D)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & 0 \\ -\frac{2}{45} & \frac{4}{9} & 0 \\ -\frac{28}{585} & -\frac{16}{117} & \frac{4}{13} \end{pmatrix}.$$

Si osserva che il **metodo di Gauss-Seidel converge molto più velocemente del metodo di Jacobi**

Ripetere per $\|C_{GS}\|_1$.

Esercizio

Dato il sistema

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 & = & 5 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 & = & 2 \\ 2x_2 + 4x_3 & = & 20 \end{cases}$$

stabilire se è possibile risolverlo usando il **metodo di Jacobi** per ogni scelta dell'approssimazione iniziale.

Soluzione

La matrice dei coefficienti del sistema è $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Si osserva subito che A non è a diagonale dominante nè per righe nè per colonne.

La matrice di iterazione del metodo di Jacobi è

$$C_J = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -3 & 0 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

per la quale risulta

$$\|C_J\|_\infty = \max\{4, 4, 1/2\} = 4 > 1$$

$$\|C_J\|_1 = \max\{3, 9/2, 1\} = 3 > 1$$

$$\rho(C_J) = \max_i |\lambda_i| = 5/\sqrt{2} > 1$$

infatti $\det(C_J - \lambda I) = -\lambda^3 + \lambda/2 + 12\lambda = \lambda(-\lambda^2 + 25/2) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = \pm 5/\sqrt{2}$ e quindi $\max_i |\lambda_i| = 5/\sqrt{2}$.

Quindi il metodo di Jacobi **non converge**.

Tuttavia, **scambiando la prima e la seconda equazione del sistema**, si ottiene un sistema equivalente la cui matrice dei coefficienti è data da

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

alla quale è associata la seguente matrice di iterazione del metodo di Jacobi

$$\hat{C}_J = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

per la quale risulta

$$\|\hat{C}_J\|_\infty = \max\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{2}{3} < 1$$

$$\|\hat{C}_J\|_1 = \max\left\{\frac{1}{4}, \frac{5}{6}, \frac{1}{3}\right\} = \frac{5}{6} < 1$$

$$\rho(\hat{C}_J) = \max_i |\lambda_i| = 0.4257 < 1.$$

In questo caso il metodo di Jacobi converge per ogni scelta della approssimazione iniziale.

Inoltre, la **velocità di convergenza** del metodo è

$$-\text{Log}(\rho(\hat{C}_J)) = -\text{Log}(0.4257) = 0.8540$$

e l'errore di approssimazione si riduce di un fattore **10^{-m}** all'iterazione

$$K \approx -\frac{m}{\text{Log}(\rho(\hat{C}_J))} = \frac{m}{0.8540}.$$

F I N E

Dim. 1

$$\bar{X} = \lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi \left(X^{(k-1)} \right) = \Phi \left(\lim_{k \rightarrow \infty} X^{(k-1)} \right) = \Phi \left(\bar{X} \right)$$

Dim. 2

$\forall X, Y \in D$, si può valutare $\|\Phi(Y) - \Phi(X)\|$ considerando lo sviluppo in serie di Taylor arrestato al primo ordine della funzione Φ attorno a X , da cui risulta

$$\|\Phi(Y) - \Phi(X)\| \leq \|J(X)\| \|Y - X\| \leq \lambda \|Y - X\|.$$

Dim. 3

$$\forall X \neq Y, \quad \|\Phi(X) - \Phi(Y)\| = \|C(X - Y)\| \leq \|C\| \|X - Y\| \leq \lambda \|X - Y\|$$

Dim. 4

$$E^{(k)} = \bar{X} - X^{(k)} = (C\bar{X} + Q) - (CX^{(k-1)} + Q) =$$

$$= C(\bar{X} - X^{(k-1)}) = CE^{(k-1)} \Rightarrow \boxed{E^{(k)} = CE^{(k-1)}}$$

$$\|E^{(k)}\| = \|CE^{(k-1)}\| = \|C^2E^{(k-2)}\| = \dots = \|C^k E^{(0)}\| \leq \|C^k\| \cdot \|E^{(0)}\|$$



Relazione di compatibilità

$$\|E^{(k)}\| \leq \|C^k\| \cdot \|E^{(0)}\| = \underbrace{\|C \cdot C \dots C\|}_{k \text{ volte}} \cdot \|E^{(0)}\| \leq \|C\|^k \cdot \|E^{(0)}\|$$

$$\boxed{\text{se } \|C\| < 1 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|E^{(k)}\| = 0}$$

Dim. 5

\Rightarrow Se $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$, allora definitivamente $\|A^k\| < 1$. Poichè, dalla relazione di compatibilità risulta $\rho(A^k) < \|A^k\|$, segue che $\rho(A^k) < 1$; ma $\rho^k(A) = \rho(A^k)$, quindi $\rho^k(A) < 1$, ovvero $\rho(A) < 1$.

\Leftarrow Se $\rho(A) < 1$ allora $\exists \epsilon : \rho(A) < 1 - \epsilon$. Inoltre, poichè $\rho(A) \leq \|A\|$, esiste una norma compatibile per cui $\|A\| < \rho(A) + \epsilon$; quindi $\|A\| < 1 - \epsilon + \epsilon = 1$. Ne segue che $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A\|^k = 0$. Il teorema risulta dimostrato osservando che $0 \leq \|A^k\| \leq \|A\|^k$.

Dim. 6

$$E^{(k)} = C E^{(k-1)} = \dots = C^k E^{(0)}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} C^k E^{(0)} = 0 \iff \underbrace{\lim_{k \rightarrow \infty} C^k = 0}_{\substack{\text{matrice} \\ \text{convergente}}} \iff \rho(C) < 1$$

Dim. 7

- $\|E^{(k)}\| = \|X^{(k)} - \bar{X}\| = \|X^{(k)} - X^{(k+1)} + X^{(k+1)} - \bar{X}\| =$
 $= \|X^{(k)} - X^{(k+1)} + E^{(k+1)}\| \leq \underbrace{\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| + \|E^{(k+1)}\|}_{\downarrow}$
- $\|E^{(k+1)}\| \leq \|C\| \cdot \|E^{(k)}\| \leq \|C\| (\|X^{(k+1)} - X^{(k)}\| + \|E^{(k+1)}\|)$

$$\|E^{(k+1)}\| \leq \frac{\|C\|}{1 - \|C\|} \cdot \|X^{(k+1)} - X^{(k)}\|$$

d'altra parte

$$\|E^{(k+1)}\| \leq \|C\|^k E^{(1)} \leq \frac{\|C\|^{k+1}}{1 - \|C\|} \cdot \|X^{(1)} - X^{(0)}\| \leq \varepsilon$$