METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 1 luglio 2020

Nome e Cognome ____ **matricola** __________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Data la successione di funzioni di variabile complessa definita nel semipiano $Re(z) \geq 0$ come

$$f_n(z) = \frac{n^3}{n^3 z + \sqrt{n}}, \quad n \geq 1$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(z)$

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

R: L'insieme A di convergenza puntuale è l'insieme di definizione della successione privato dello zero, cio è $A = \{z \in C : Re(z) \geq 0, z \neq 0\}$. La funzione limite $f(z)$ (definita in A) è $f(z) = \frac{1}{z}$.

La convergenza non è uniforme in tutto A in quanto per ogni n

$$g_n = \sup_A |f_n(z) - f(z)| = \sup_A \frac{\sqrt{n}}{|n^3 z + \sqrt{n}||z|} = +\infty$$

La convergenza è uniforme in ogni sottoinsieme di A della forma $B_a = \{z \in C : |z| \geq a > 0\}$.

Infatti per $n > \frac{1}{a^{2/5}}$ si ha

$$g_n = \sup_{B_a} |f_n(z) - f(z)| = \sup_{B_a} \frac{\sqrt{n}}{|n^3 z + \sqrt{n}||z|} \leq \frac{\sqrt{n}}{(n^3 a - \sqrt{n})a} \to 0$$

E 2 Calcolare con i metodi della variabile complessa il seguente integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senx}{x^3-1} dx$$

R:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{senx}{x^3-1} dx = Im\Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^3-1} dx\Big)$$

Ora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^3-1} dx = 2\pi i\, res(\frac{e^{iz}}{z^3-1}, -1/2 + i\sqrt{3}/2) + \pi i\, res(\frac{e^{iz}}{z^3-1}, 1) =$$

$$2\pi i \frac{e^{i(-1/2+i\sqrt{3}/2)}}{-(i\sqrt{3}\,3/2+3/2)} + \pi i \frac{e^{i}}{(3/2-i\sqrt{3}/2)(3/2+i\sqrt{3}/2)}$$

La formula precedente deriva dall'uso del lemma di Jordan e del lemma del polo semplice. Il punto $-1/2 + i\sqrt{3}/2$ è l'unico punto singolare a parte immaginaria positiva, polo semplice e 1 è l'unico punto singolare reale, polo semplice. Dunque il valore dell'integrale richiesto è pari alla parte immaginaria dell'ultimo numero. Si osservi che è un numero reale.

D

(i) La seguente funzione

$$F(z) = Log(-z^2),$$

a) ammette primitiva nell'insieme di olomorfia perchè esso è unione di due insiemi semplicemente connessi

b) non ammette primitiva nell'insieme di olomorfia perchè esso non è semplicemente connesso

c) non ammette primitiva nell'insieme di olomorfia perchè esistono curve chiuse in esso contenute lungo cui l'integrale non è nullo

R: a) perchè l'insieme di olomorfia è $C - R$ che è unione di due aperti semplicemente connessi. In ognuno di essi esiste una primitiva per il corollario del teorema di Cauchy e dunque esiste una primitiva in tutto l'aperto di olomorfia $C - R$.

(ii) La funzione

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{10} \frac{(z-5)^n}{3^{n+3}},$$

è analitica nell'insieme

a) $|z - 5| > 3$

b)$|z - 5| < 3$

c) in $C - \{5\}$

R: a) perchè la parte regolare converge in tutto C essendo costituita da un numero finito di termini, mentre la parte singolare converge per $|z-5| > 3$ (calcolare il raggio di convergenza della serie di potenze ordinaria ottenuta ponendo $\frac{1}{(z-5)} = w$).

(iii) Sia $\beta \in R$. La funzione periodica di periodo 2, definita in $[1, 3)$ come

$$f(t) = \begin{cases} |t-2|^{\beta}, \ t \neq 2 \\ 1 \quad t = 2 \end{cases}$$

è tale che la sua serie di Fourier converge totalmente in R se

a) $\beta \geq 1$ o $\beta = 0$

b) per ogni valore di β c) $\beta < 1$

R: a) come segue dalla definizione di funzione regolare a tratti.