ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 5 aprile 2013

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare con quattro cifre decimali esatte il seguente integrale, motivando i passaggi

$$\int_0^1 \frac{sen\,(x^2)}{x}\,dx$$

.

R: $\int_0^1 \frac{sen\,(x^2)}{x}\,dx \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{3!6} + \frac{1}{5!10}$

(Si usa lo sviluppo di Taylor di $senx$, si integra termine a termine, dal momento che le serie di potenze sono sempre integrabili termine a termine all'interno del loro intervallo di convergenza, si usa la stima del resto per le serie di Leibnitz:

$$|R_n| \leq \frac{1}{(2n+3)!}\frac{1}{4n+6}$$

e si impone che sia

$$\frac{1}{(2n+3)!}\frac{1}{4n+6} < 10^{-4}.$$

Dunque sufficiente scegliere $n = 2$.)

E 2 Data la funzione $f(t)$ periodica di periodo 3, definita nell'intervallo $[0,3]$ come

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t-5}{|2-t|^{\alpha}} & \text{se} \quad t \in [0,3) - \{2\} \\ \\ 2 & \text{se} \quad t = 2 \end{cases}$$

(i) dire per quali valori di α é regolare a tratti e per quali é di quadrato sommabile

(ii) per i valori per cui é regolare a tratti, calcolare la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier nel punto $t = 3$.

R:

(i) $\alpha = 0$ e $\alpha \leq -1$.

(ii) Se $\alpha \leq -1$, $S(3) = \frac{f(3_+)+f(3_-)}{2} = -1 - \frac{5}{2^{\alpha+1}}$.

Se $\alpha = 0$, $S(3) = -\frac{7}{2}$.

E 3

(i) Studiare la convergenza assoluta e totale della seguente serie di funzioni definita per $z \in C$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{e^{nz-1}}$$

(ii) Dire cosa cambia se la serie é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{e^{nz-1}}.$$

R:

(i) Convergenza assoluta nel semipiano aperto $S = \{z \in C : Re(z) > 0\}$, convergenza totale nei semipiani chiusi $S_\alpha = \{z \in C : Re(z) \geq \alpha > 0\}$.

(Si osserva che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{e^{nz-1}} = e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-nz}$.

Si pone $e^{-z} = t$, la serie in campo complesso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ é una serie di potenze con raggio di convergenza 1. Si osserva poi che $|t| = |e^{-z}| = e^{-Re(z)}$.)

(ii) La situazione migliora: si ha convergenza totale in tutto l'insieme $\{z \in C : Re(z) \geq 0\}$, in quanto, posto $M_n = sup_{|t| \leq 1} \frac{|t|^n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$, la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ________________ 1.4

D 1

(i) Definizione di esponenziale e logaritmo (tutte le determinazioni) in campo complesso.

(ii) Provare, usando il principio di identitá delle funzioni analitiche, che:

$$(e^z)^2 = e^{2z} \quad \forall z \in C :$$

R:

(ii) Le due funzioni $(e^z)^2$ e e^{2z} sono analitiche in C e coincidono sull'asse reale che é un sottoinsieme di C non costituito interamente da punti isolati. Dunque coincidono su tutto C.

D 2

(i) Enunciare e dimostrare il teorema dei residui.

(ii) Calcolare

$$\int_\gamma \frac{1}{z^3} Log\big(1+2z\big)dz$$

dove $\gamma(t) = \frac{1}{3}e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi.$

R: $-4\pi i$

(Si usa il teorema dei residui. L'unico punto singolare $z_0 = 0$ cade entro γ e $res(f(z), 0) = -2$, come si vede dallo sviluppo in serie di Laurent della funzione. Si noti che la curva γ cade entro la regione in cui vale lo sviluppo in serie di Laurent della funzione, cioé l'intorno forato dell'origine di raggio $\frac{1}{2}$.)