ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 5 aprile 2013

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare con tre cifre decimali esatte il seguente integrale, motivando i passaggi

$$\int_0^1 \frac{1 - cos\,(x^2)}{x}\,dx$$

.

R: $\int_0^1 \frac{1-cos\,(x^2)}{x}\,dx \approx \frac{1}{2.4} - \frac{1}{4!8}$

(Si usa lo sviluppo di Taylor di $cosx$, si integra termine a termine, dal momento che le serie di potenze sono sempre integrabili termine a termine all'interno del loro intervallo di convergenza, si usa la stima del resto per le serie di Leibnitz:

$$|R_n| \leq \frac{1}{(2(n+1))!}\frac{1}{4(n+1)}$$

e si impone che sia

$$\frac{1}{(2(n+1))!}\frac{1}{4(n+1)} < 10^{-3}.$$

Dunque é sufficiente scegliere $n = 2$.)

E 2 Data la funzione $f(t)$ periodica di periodo 2, definita nell'intervallo $[0, 2]$ come

$$f(t) = \begin{cases} \frac{t-3}{|t-1|^{\alpha}} & \text{se} \quad t \in [0, 2) - \{1\} \\ \\ 2 & \text{se} \quad t = 1 \end{cases}$$

(i) dire per quali valori di α é regolare a tratti e per quali é di quadrato sommabile

(ii) per i valori per cui é regolare a tratti, calcolare la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier nel punto $t = 2$.

R:

(i) Regolare a tratti per $\alpha = 0$ e $\alpha \leq -1$.

Di quadrato sommabile per $\alpha < \frac{1}{2}$.

(ii) $S(2) = \frac{f(2_+)+f(2_-)}{2} = \frac{-3-1}{2} = -2$ per tutti i valori di α.

E 3

(i) Studiare la convergenza assoluta e totale della seguente serie di funzioni definita per $z \in C$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{e^{-nz+2}}$$

(ii) Dire cosa cambia se la serie é

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \frac{1}{e^{-nz+2}}.$$

R:

(i) Convergenza assoluta nel semipiano aperto $S = \{z \in C : Re(z) < 0\}$, convergenza totale nei semipiani chiusi $S_\alpha = \{z \in C : Re(z) \leq \alpha < 0\}$.
(Si osserva che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{1}{e^{-nz+2}} = e^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{nz}$.
Si pone $e^z = t$, la serie in campo complesso $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}$ é una serie di potenze con raggio di convergenza 1. Si osserva poi che $|t| = |e^z| = e^{Re(z)}$.)

(ii) La situazione migliora: si ha convergenza totale in tutto l'insieme $\{z \in C : Re(z) \leq 0\}$, in quanto, posto $M_n = sup_{|t| \leq 1} \frac{|t|^n}{n^3} = \frac{1}{n^3}$, la serie numerica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge.

D 1

(i) Definizione di esponenziale e logaritmo (tutte le determinazioni) in campo complesso.

(ii) Provare, usando il principio di identitá delle funzioni analitiche, che:

$$e^{z+2} = e^z e^2 \quad \forall z \in C :$$

R:

(ii) Le due funzioni e^{z+2}, $e^z e^2$ sono analitiche in C e coincidono sull'asse reale che é un sottoinsieme di C non costituito interamente da punti isolati. Dunque coincidono su tutto C.

D 2

(i) Enunciare e dimostrare il teorema dei residui.

(ii) Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^4} arctg\big(3z\big) dz$$

dove $\gamma(t) = \frac{1}{4}e^{it},\ 0 \leq t \leq 2\pi.$

R:

(ii) $-18\pi i$

(Si usa il teorema dei residui. Il residuo nel punto $z_0 = 0$ si calcola usando lo sviluppo in serie di Laurent della funzione, che vale nell'intorno forato di $z_0 = 0$ di raggio $\frac{1}{3}$, dove la curva $\gamma(t)$ é contenuta. Si ha che $c_{-1} = res(\frac{1}{z^4} arctg\big(3z\big), 0) = -9.$)