# METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
## Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

**Esame del 9 aprile 2021**

**Nome e Cognome** ______________________________ **matricola** ______________

**Firma** ____________________________________________

**MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE**

**E 1**

Data la successione di funzioni di due variabili reali, definita per $(x,y) \in R^2$ da

$$f_n(x,y) = \begin{cases} -n^2 \quad se \qquad (x,y) \in \{(x,y) : |x| \le \frac{1}{n}, |y| \le \frac{1}{n}\} \\ \\ 1 \qquad altrove, \end{cases}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x,y)$

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione:

L'insieme di convergenza puntuale è $A = \{(x,y) \in R^2 : (x,y) \neq (0,0)\}$ e la funzione limite è la funzione $f(x,y) \equiv 1$.

La convergenza non è uniforme in $A$, ma lo è in ogni $B_\alpha = C - \{(x,y) \in R^2 : |x| \le \alpha, |y| \le \alpha, \quad \alpha > 0\}$.

Infatti per ogni $n \ge 0$ si ha

$$g_n = \sup_A |f_n(x,y) - f(x,y)| = n^2 + 1$$

e $\lim_{n\to+\infty} n^2 + 1 = +\infty$, dunque non c'è convergenza uniforme in $A$.

Invece per ogni $n > \frac{1}{\alpha}$ si ha

$$g_n = \sup_{B_\alpha} |f_n(x,y) - f(x,y)| = 0$$

e $\lim_{n\to+\infty} 0 = 0$, dunque c'è convergenza uniforme in $B_\alpha$.

**E 2**

Trovare l'aperto di olomorfia della funzione $f(z) = Log(-z^2)$.

Date le due curve $\gamma_1(t) = x(t) + iy(t)$ definita per $t \in [1,2]$ da

$$\begin{cases} x(t) = t \\ \\ y(t) = (t+1)^2 \end{cases}$$

e $\gamma_2(t) = x(t) + iy(t)$ definita per $t \in [1,2]$ da

$$\begin{cases} x(t) = t \\ \\ y(t) = 5t - 1, \end{cases}$$

provare (senza calcolare gli integrali) che

$$\int_{\gamma_1} Log(-z^2)dz = \int_{\gamma_2} Log(-z^2)dz.$$

Enunciare e dimostrare brevemente il risultato teorico che si è usato.

Soluzione: l'aperto di olomorfia è $C - R$ (si devono togliere i punti per cui $-z^2$ è reale negativo o nullo).

Le due curve hanno gli stessi estremi e sono contenute nel semipiano $Im(z) > 0$ che è un aperto semplicemente connesso del piano complesso, in cui $Log(-z^2)$ è olomorfa. In tale aperto la funzione $Log(-z^2)$ ammette primitiva per il corollario del teorema di Cauchy e dunque l'integrale lungo una curva dipende solo dagli estremi della curva stessa.

**D** Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

**1)** Dare la definizione di funzione esponenziale in campo complesso $e^z$ e provare che non è invertibile in $C$. Dire in quale di questi insiemi la sua restrizione è invertibile

a) $A = \{z = x + iy : -\pi \le x < \pi,\ y \in R\}$

b) $A = \{z = x + iy :\ x \in R,\ 3\pi \le y < 5\pi\}$

c) $A = \{z = x + iy :\ x \in R,\ 3\pi \le y < 6\pi\}$.

Nell'insieme individuato costruire la sua inversa. Soluzione: b) in quanto la funzione esponenziale è periodica di periodo $2pii$.

**2)**

Calcolare il seguente integrale di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{z^4 - iz + 1}{z^k} dz$$

dove $k \in N - \{0\}$ e $\gamma$ è il bordo dell'insieme $T = \{z = x + iy : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} \le 1\}$

a)

$$\int_\gamma \frac{z^4 - iz + 1}{z^k} dz = \begin{cases} 0 & se \quad k \ne 1, 5 \\ 2\pi i & se \quad k = 1, 5 \end{cases}$$

b)

$$\int_\gamma \frac{z^4 - iz + 1}{z^k} dz = \begin{cases} 0 & se \quad k > 1 \\ 2\pi i & se \quad k = 1 \end{cases}$$

c)

$$\int_\gamma \frac{z^4 - iz + 1}{z^k} dz = \begin{cases} 0 & se \quad k \ne 1, 2, 5 \\ 2\pi i & se \quad k = 1, 5 \\ 2\pi & se \quad k = 2 \end{cases}$$

Soluzione: c) per il teorema dei residui.

**3)**

**Nome e Cognome** ____________________________________ **matricola** __________________ 1.3

Calcolare la trasformata di Laplace $F(s)$ del segnale $f(t)$, periodico di periodo $T = 8$ definito nell'intervallo $[-4, 4)$ da

$$f(t) = \begin{cases} 6 & t \in [-4, 0] \\ 0 & t \in (0, 4) \end{cases}$$

a) $F(s) = -\frac{6}{s}\frac{1-e^{-4s}}{1-e^{8s}} \qquad Re(s) > 0$

b) $F(s) = \frac{6}{s}\frac{e^{4s}-1}{1-e^{-8s}} \qquad Re(s) > 0$

c) $F(s) = -\frac{6}{s}\frac{1}{1-e^{-8s}} \qquad Re(s) > 0$

Soluzione: b) usare la formula della trasformata di un segnale periodico.