

ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 10 luglio 2013

Nome e Cognome _____ matricola _____

Firma _____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

ESERCIZIOE 1 Calcolare il seguente integrale

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z^2 \operatorname{sen}(z + 2i)} dz$$

dove

a) γ é la curva definita da $|z + 2i| = 1$.

b) γ é la curva definita da $|z + 2i| = 3$.

R: : a) $-\frac{\pi i}{2}$ ($z_0 = -2i$ unico punto singolare contenuto in γ , polo semplice), b) $-\pi i(\frac{1}{2} + 2\frac{\cos 2i}{(\operatorname{sen} 2i)^2})$
($z_0 = -2i$, $z_1 = 0$ polo doppio, punti singolari contenuti in γ)

E 2 Calcolare l'ascissa di convergenza $\sigma[f]$ e la trasformata di Laplace della funzione

$$f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t \leq 2\pi \\ e^{-2t} & t > 2\pi \end{cases}$$

R: $\sigma[f] = -2$ (bisogna trovare i numeri complessi s per cui $\int_{2\pi}^{+\infty} |e^{-st}|e^{-2t} dt = \int_{2\pi}^{+\infty} 2e^{(-\operatorname{Re}(s)-2)t} dt < +\infty$ e poi prendere l'estremo inferiore delle loro parti reali)

$$L[f](s) = 3\frac{1-e^{-s2\pi}}{s} + \frac{e^{-(s+2)2\pi}}{s+2}$$

E 3

(i) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ della seguente funzione:

$$f(z) = \operatorname{Log}\left(\frac{z^2 + 4}{z^2}\right) + \frac{1}{z - 5}$$

(ii) Precisare l'insieme in cui lo sviluppo vale.

$$R: f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2(n+1)}}{n+1} \frac{z^{2(n+1)}}{z^{2(n+1)}} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{5^{n+1}} \quad \text{in } \{z \in C : 2 < |z| < 5\}.$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2(n+1)}}{n+1} \frac{z^{2(n+1)}}{z^{2(n+1)}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{z^{n+1}} \quad \text{in } \{z \in C : 5 < |z|\}.$$

D 1

(i) Dare la definizione della funzione esponenziale in campo complesso e provare che non é invertibile in tutto C .

(ii) Provare che la funzione $f(z) = \text{sen}(z^3)$ non é limitata in campo complesso.

R:

(i) $e^z = e^x(\cos y + i \text{sen} y)$, $z = x + iy \in C$. La funzione non é invertibile in C perché periodica di periodo $2\pi i$.

(ii) $\text{sen}(z^3) = \frac{e^{iz^3} - e^{-iz^3}}{2i}$. In particolare, se $z = iy$, $y \in R$, $\text{sen}((iy)^3) = \frac{e^{-y^3} - e^{+y^3}}{2i}$ il cui modulo tende a $+\infty$ se y tende a $\pm\infty$.

D 2

(i) Dare la definizione di convergenza puntuale e di convergenza uniforme in un insieme $A \subseteq C$ per successioni di funzioni in campo complesso $(f_n(z))_{n \in N}$, $z \in C$.

(ii) Provare che la successione definita da

$$f_n(z) = z^n \quad n \in N$$

converge puntualmente alla funzione $f(z) = 0$ ma non uniformemente nell'insieme $A = \{z \in C : |z| < 1\}$.

R:

(ii) Si ha convergenza puntuale in A perché $\lim_{n \rightarrow +\infty} |z^n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |z|^n = 0 \quad \forall z \in A$. La convergenza non é uniforme in A perché $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{z \in A} |z|^n = 1$