Sapienza - UniversitÃ di Roma
FacoltÃ di Ingegneria - A.A. 2014-2015
Soluzioni appello Metodi Matematici per l'Ingegneria del 10 luglio 2015

Esercizio 1. Calcolare l'integrale

$$\int_\gamma f(z)dz$$

dove $f(z) = \bar{z}^2\ Log(1 - \frac{iz}{2})$ e $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. (Suggerimento: usare $z \cdot \bar{z} = |z|^2$)

Soluzione:

Si ha che

$$\int_\gamma \bar{z}^2\ Log(1 - \frac{iz}{2})dz = \int_\gamma \frac{Log(1 - \frac{iz}{2})}{z^2}|z|^4\,dz = -\frac{1}{16}\int_\gamma \sum_{n\ge0} \frac{i^{n+1}}{2^{n+1}(n+1)} z^{n-1}dz = \frac{\pi}{16}$$

dove nei passaggi precendenti si è usato lo sviluppo in serie di $Log(1+z)$.

Esercizio 2. Dire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la serie di Fourier di $f(t)$, periodica di periodo 5 e definita in $[0,5)$ come

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|t-1|^\alpha}, & t \in [0,5) \setminus \{1\} \\ \\ 4, & t = 1 \\ \end{cases}$$

converge puntualmente e calcolarne la somma nel punto $t = 0$.

Soluzione:

La funzione risulta continua a tratti per $\alpha \le 0$ e regolare a tratti per $\alpha \le -1$ e $\alpha = 0$ (lo si veda calcolando la derivata).
Si ha che per per $\alpha \le -1$ la somma della serie nel punto $t = 0$ è data da

$$S(0) = \frac{f(0_+) + f(0_-)}{2} = \frac{1 + \frac{1}{4^\alpha}}{2},$$

mentre per $\alpha = 0$ si ha che

$$S(t) = 1, \quad \forall t$$

quindi in particolare $S(0) = 1$ per $\alpha = 0$.

Esercizio 3. Si determini una funzione olomorfa in C che abbia come parte reale la funzione

$$u(x,y) = 3\sin xe^y.$$

Si riscriva poi la funzione $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$ in termini di $f(z)$.

Soluzione:

Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

si trova che

$$v_y = 3\cos xe^y, \quad v_x = 3\cos xe^y$$

da cui integrando si ha

$$v(x,y) = 3\cos xe^y + h(x) = 3\cos xe^y + g(y).$$

Dunque bisogna scegliere $h(x) = g(y)$ costanti, per esempio nulle. La funzione f édunque

$$f(x, y) = 3(\sin x\, e^y + i \cos x\, e^y).$$

La funzione in termini di z si riscrive come

$$f(z) = 3\frac{e^{i\bar{z}}(1+i) + e^{-i\bar{z}}(-1+i)}{2i}$$

dove sono state utilizzate le formule $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ e $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$.

Esercizio 4 (D1)**.** Data

$$f_n(t) = -3n\left[H(t) - H(t - \frac{1}{n})\right], \quad t \in [0, +\infty),$$

(i) calcolare $\lim_{n\to+\infty} f_n(t)$;
(ii) calcolare la trasformata di Laplace $L[f_n(t)](s)$;
(iii) calcolare $\lim_{n\to+\infty} L[f_n(t)](s)$.

Soluzione:

- (i) Si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ -\infty & t = 0 \end{cases}$$

- (ii)

$$L[f_n(t)](s) = -3n\, L\left[H(t) - H\big(t - \frac{1}{n}\big)\right] = -3n\left(\frac{1}{s} - e^{-\frac{s}{n}} \cdot \frac{1}{s}\right) =$$
$$-\frac{3n}{s}\left(1 - e^{-\frac{s}{n}}\right).$$

- (iii)

$$\lim_{n\to+\infty} L[f_n(t)](s) = -3.$$

Esercizio 5 (D2)**.**
(i) Dire per quali valori di $k \in Z$ la funzione $f(z) = \frac{1}{z^k} + \frac{1}{(z-1)^2}$ ammette primitiva in $C \setminus \{0, 1\}$.
(ii) Enunciare il teorema che si è usato nel punto precedente e dimostrare almeno un'implicazione.

Soluzione:

Per $k \neq 1$ la funzione $f(z)$ ammette primitiva $C \setminus \{0, 1\}$ poiché

$$\int_\gamma f(z) dz = 0$$

per ogni curva chiusa γ contenuta in $C \setminus \{0, 1\}$.
Infatti l'integrale è nullo se né 0 né 1 sono contenuti in γ. Se invece uno solo dei due punti è contenuto oppure entrambi i punti sono contenuti l'integrale è zero per il teorema dei residui.
Per $k = 1$ la funzione $f(z)$ non ammette primitiva in $C \setminus \{0, 1\}$ poiché

$$\int_\gamma \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0$$

con $\gamma(t)$ curva chiusa contenente il punto 0.