ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 11 febbraio 2013

Nome e Cognome ______________________________________ **matricola** ________________

Firma ____

$\boxed{\textbf{MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE}}$

E 1 Calcolare, usando i metodi della variabile complessa,

$$\int_\gamma \frac{1}{cosz}\, dz$$

dove γ é la curva bordo dell'insieme $S = \{z \in C : \quad -3 \leq Re(z) \leq 3, \quad -1 \leq Im(z) \leq Re(z) + 3.\}$

R: 0 (i punti singolari che cadono entro γ sono $z_0 = \frac{\pi}{2}$ e $z_1 = -\frac{\pi}{2}$, poli semplici, perché zeri di ordine 1 per il denominatore. Per z_0 il residuo é -1, per z_1 é 1.)

Nome e Cognome ____**matricola** ______________________ 1.2

E 2 Data la seguente funzione $f(z)$, scrivere il suo sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = i$ in un intorno forato di tale punto, precisando il raggio di tale intorno:

$$f(s) = \frac{1}{(s-i)^2(s-2)}$$

R: $f(s) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(s-i)^{n-2}}{(2-i)^{n+1}}$, nell'intorno forato di $s = i$ di raggio $\sqrt{5}$,

$$B^*_{\sqrt{5}} = \{s \in C : 0 < |s-i| < \sqrt{5}\}$$

E 3 Individuare l' insieme di convergenza puntuale, la funzione limite $f(x, y)$ e l'insieme di convergenza uniforme della seguente successione di funzioni $(f_n(x, y))_{n \in N}$ in due variabili

$$f_n(x, y) = \frac{|x-y|^n}{n^2}, \quad (x, y) \in R^2$$

R: convergenza uniforme (e dunque anche puntuale) a $f(x, y) = 0$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : |x - y| \leq 1\} = \{(x, y) \in R^2 : -1 + y \leq x \leq 1 + y\}$.

Nome e Cognome ______________________________________**matricola** ____________________ 1.4

D 1

(i) Enunciare la condizione sufficiente perché una funzione $F(s)$ sia trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$ e scrivere la formula di inversione.

(ii) Provare che la funzione

$$F(s) = \frac{e^{-3s}}{s^2 + 2s + 3}$$

é trasformata di un segnale $f(t)$. (Facoltativo: ricostruire il segnale)

R:

(ii) $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+3}$ é olomorfa nel semipiano $Re(s) > -1$ e $G(s) = O(\frac{1}{s^2})$ per |s| $\to +\infty$.

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{t-3} sen(\sqrt{2}(t-3)).$$

Tutto l'esercizio va svolto sulla funzione $G(s) = \frac{1}{s^2+2s+3}$, l'esponenziale e^{-3s} é il fattore di ritardo.

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ________________ 1.5

D 2

(i) Provare che una funzione olomorfa in un aperto connesso A ammette primitiva in ogni aperto semplicemente connesso A' contenuto in A.

(ii) Usando (i), trovare un aperto contenuto in $C^* = C - \{0\}$ in cui la funzione $\frac{1}{z}$ ammetta primitiva in

R: per la dimostrazione del punto (i), si veda il Corollario al Teorema integrale di Cauchy.

Per il punto (ii), basta scegliere C^{**}, oppure un cerchio o un rettangolo contenuto nel primo quadrante.