ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 11 febbraio 2013

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare, usando i metodi della variabile complessa,

$$\int_\gamma \frac{1}{senz-1}\,dz$$

dove γ é la curva bordo dell'insieme $S = \{z \in C : \quad -6 \le Re(z) \le 6, \quad Re(z)-6 \le Im(z) \le Re(z)+6.\}$

R: 0 (i punti singolari che cadono entro γ sono $z_0 = \frac{\pi}{2}$ e $z_1 = -\frac{3\pi}{2}$, poli doppi, perché zeri di ordine 2 per il denominatore. Per entrambi il residuo é 0.)

E 2 Data la seguente funzione $f(z)$, scrivere il suo sviluppo in serie di Laurent di centro $z_0 = 2$ in un intorno forato di tale punto, precisando il raggio di tale intorno:

$$f(s) = \frac{1}{(s-2)^2(s-i)}$$

R: $f(s) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(s-2)^{n-2}}{(2-i)^{n+1}}$, nell'intorno forato di $s = 2$ di raggio $\sqrt{5}$,

$$B^*_{\sqrt{5}} = \{s \in C : 0 < |s-2| < \sqrt{5}\}$$

E 3 Individuare l' insieme di convergenza puntuale, la funzione limite $f(x, y)$ e l'insieme di convergenza uniforme della seguente successione di funzioni $(f_n(x, y))_{n \in N}$ in due variabili

$$f_n(x, y) = \frac{|x + y|^n}{n}, \quad (x, y) \in R^2$$

R: convergenza uniforme (e dunque anche puntuale) a $f(x, y) = 0$ nell'insieme $A = \{(x, y) \in R^2 : |x + y| \leq 1\} = \{(x, y) \in R^2 : -1 - x \leq y \leq 1 - x\}$.

D 1

(i) Enunciare la condizione sufficiente perché una funzione $F(s)$ sia trasformata di Laplace di un segnale $f(t)$ e scrivere la formula di inversione.

(ii) Provare che la funzione

$$F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2 + 3s + 1}$$

é trasformata di un segnale $f(t)$. (Facoltativo: ricostruire il segnale)

R:

(ii) $G(s) = \frac{1}{s^2+3s+1}$ é olomorfa nel semipiano $Re(s) > \frac{-3+\sqrt{5}}{2}$ e $G(s) = O(\frac{1}{s^2})$ per $|s| \to +\infty$. $f(t) = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{2}(t-2)} - \frac{1}{\sqrt{5}} e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{2}(t-2)}$. Tutto l'esercizio va svolto sulla funzione $G(s) = \frac{1}{s^2+3s+1}$, l'esponenziale e^{-2s} é il fattore di ritardo.

D 2

(i) Calcolare, usando la definizione di integrale curvilineo,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$

dove $\gamma(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$.

(ii) Usando (i), provare che la funzione $\frac{1}{z}$ non ammette primitiva in $C^* = C - \{0\}$

R: Dal punto (i),

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i \neq 0 \quad \forall\, \gamma(t) = re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Se $\frac{1}{z}$ ammettesse primitiva in C^*, l'integrale della funzione sarebbe nullo lungo tutte le curve chiuse contenute in C^*.