METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 11 febbraio 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Data la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{e^{zn}}{n^\alpha} - \frac{e^{z(n+1)}}{(n+1)^\alpha}\right] \quad z \in C$$

si costruisca la successione delle somme parziali $S_n(z)$, si specifichi dove la convergenza della serie è puntuale, uniforme e totale e si calcoli la somma al variare di $\alpha \geq 0$.

Risposta:

$$S_n(z) = e^z - \frac{e^{(n+1)z}}{(n+1)^\alpha}$$

Se $\alpha > 0$ l'insieme di convergenza puntuale e uniforme è $A = \{z = x + iy : x \leq 0\}$, quello di convergenza totale è $T = \{z = x + iy : x \leq a < 0\}$ se $0 < \alpha < 1$ e $T = \{z = x + iy : x \leq 0\}$ se $\alpha > 1$. La somma è $S(z) = e^z$.

Se $\alpha = 0$ l'insieme di convergenza puntuale è $A = \{z = x + iy : x < 0\} \cup \{z = 2k\pi i,\ k \in Z\}$, quello di convergenza totale e uniforme è $T = \{z = x + iy : x \leq a < 0\}$. La somma è

$$S(z) = \begin{cases} e^z & x < 0 \\ \\ 0 & z = 2k\pi i \end{cases}$$

.

E 2 Dare la definizione di aperto semplicemente connesso e dire se il seguente aperto lo è o no:

$$A = C - \{z = x + iy \in C : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x + 1\}$$

Dare un esempio di funzione $f(z)$ definita in A tale che

a) abbia una singolarità essenziale in $z_0 = 2$ e ammetta primitiva in A

b) abbia una singolarità essenziale in $z_0 = 2$ e non ammetta primitiva in A

c) abbia un polo in $z_0 = 2$ e ammetta primitiva in A.

Risposta:

L'insieme non è semplicemente connesso.

a): $f(z) = cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$

b): $f(z) = sen\left(\frac{1}{z-2}\right)$

c): $f(z) = \frac{1}{(z-2)^3}$

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

1) Una funzione $f(z)$ analitica in C è individuata completamente se si conoscono:

a) i suoi valori su un segmento

b) il suo valore in un punto

c) i suoi valori nei punti $z = n \quad n \in N$

Enunciare e dimostrare il risultato teorico che si è usato.

Risposta: a)

2) Data la funzione

$$f(z) = Arg(z), \ z = (x, y) \in C^*,$$

scrivere esplicitamente $u(x, y) = Re(f(z))$ e $v(x, y) = Im(f(z))$ e trovare gli insiemi di continuità e di olomorfia di $f(z)$.

Calcolare

$$\int_\gamma Arg(2z)dz$$

dove $\gamma(t) = 4e^{it} \quad t \in [-\frac{\pi}{2}, \pi]$

Risposta:

a) $4(-1 - i(\frac{\pi}{2} + 1))$

b) $8\pi i$

c) $4(-1 - \pi - i(\frac{\pi}{2} + 1))$

Risposta: c)

3) Calcolare per serie il seguente integrale, specificando i passaggi e citando il risultato teorico che si usa

$$\int_0^1 \frac{log\,(1 + x^3)}{x^2}\,dx.$$

Dire motivando con quale somma parziale n-ma si può approssimare il valore dell'integrale alla seconda cifra decimale esatta.

a) $n = 3$

b) $n = 5$

c) $n = 4$

Risposta: c)