METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 11 febbraio 2022

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

Data la successione di funzioni di due variabili reali, definita per $(x, y) \in R^2$ da

$$f_n(x, y) = e^{-\left(n - \frac{y}{x^2+1}\right)^4}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x, y)$

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione:

L'insieme di convergenza puntuale è $A = R^2$ e la funzione limite è la funzione $f(x, y) \equiv 0$.

La convergenza non è uniforme in A, ma lo è in ogni $B_\alpha = \{(x, y) \in R^2 : \frac{y}{x^2+1} \leq \alpha \quad \alpha \in R\}$.

Infatti, per ogni $n \geq 0$ fissato, si ha

$$g_n = \sup_A |f_n(x, y) - f(x, y)| = \sup_A f_n(x, y) = 1.$$

L'ultima eguaglianza è dovuta al fatto che, posto $\frac{y}{x^2+1} = t$, la funzione $f_n(t) = e^{-(n-t)^4}$ ha un massimo in $t = n$. Dunque poiché $\lim_{n\to+\infty} 1 \neq 0$, non c'è convergenza uniforme in A.

Invece per ogni $n > \alpha$ si ha

$$g_n = \sup_{B_\alpha} |f_n(x, y) - f(x, y)| = \sup_{B_\alpha} f_n(x, y) = e^{-(n-\alpha)^4}$$

L'ultima eguaglianza è dovuta al fatto che $f_n(t) = e^{-(n-t)^4}$ è crescente in $(-\infty, \alpha]$ se $\alpha < n$. Dunque $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$, il che comporta la convergenza uniforme in B_α.

E 2

Data la funzione

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{5} (z - 3i)^n |n + i|^n$$

individuare l'insieme in cui è analitica, classificare i suoi punti singolari e calcolarne il residuo.

Verificare in questo esempio la validità della formula che dà i coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent di centro $3i$ di una funzione

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - 3i)^{m+1}} dz \quad \forall m \in Z$$

con γ curva chiusa regolare contenuta nell'insieme di analiticità.

Soluzione:

Si tratta di una serie di Laurent la cui somma $f(z)$ è analitica nella corona circolare che si determina studiando l'insieme di convergenza della parte regolare e l'insieme di convergenza della parte singolare.

La parte regolare è costituita da un numero finito di termini e dunque converge in tutto C.

La parte singolare

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} (z-3i)^n |n+i|^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(z-3i)^n} \frac{1}{|-n+i|^n} =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} w^n \frac{1}{|-n+i|^n}$$

dove si è posto $w = \frac{1}{z-3i}$. La serie in w è una serie di potenze ordinaria centrata in 0 con raggio di convergenza $+\infty$ dunque converge per $z \neq 3$ ossia in $C - \{3\}$ che è l'insieme di analiticità di $f(z)$.

L'unico punto singolare per $f(z)$ è $z = 3$, singolarità essenziale con residuo $c_{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Per verificare la validità della formula, inserire l'espressione di $f(z)$ nell'integrale e calcolare poi l'integrale con il teorema dei residui.

D

1)

Provare che la funzione $Logz$, definita in C^*, è olomorfa in C^{**}, ma non è derivabile nell'insieme

$$\{z = x + iy : x \leq 0, y = 0\}.$$

Provare anche che in C^{**} $Logz$ ammette primitiva.

Soluzione:

$Log(z) = log|z| + iArgz.$

La parte reale e la parte immaginaria sono definite per $z \neq 0$ dunque la funzione è definita in C^*.

La sua parte immaginaria $Argz$ non è continua nell'insieme $\{z = x + iy : x \leq 0, y = 0\}$ dunque la funzione $Logz$ non è continua (e a maggior ragione non è derivabile) nell'insieme $\{z = x + iy : x \leq 0, y = 0\}$.

Per provare che è olomorfa in C^{**} usare le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari.

In C^{**} $Logz$ ammette primitiva perché funzione olomorfa in un aperto semplicemente connesso.

2)

Si indichi la (sola) risposta esatta, motivando la risposta.

Calcolare il seguente integrale con un errore inferiore a 10^{-5}

$$\int_0^1 x^{11} sen\,(x^3) dx$$

a)

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(2n+13)}$$

b)

$$\sum_{n=0}^{4} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(2n+13)}$$

c)

$$\sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(6n+15)}$$

Soluzione: c) Sviluppare in serie di potenze la funzione integranda e integrare termine a termine. Si ottiene

$$\int_0^1 x^{11} sen\,(x^3) dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{(6n+15)}$$

Si usa la stima del resto n-mo nelle serie di Leibnitz e si impone che tale resto sia minore di 10^{-5} : per soddisfare tale condizione basta $n = 2$.

3)

Si indichi la (sola) risposta esatta, motivando la risposta.

Calcolare la trasformata di Laplace $F(s)$ del segnale $f(t)$ periodico definito, al variare di $n \geq 0$ da

$$f(t) = \begin{cases} t & 2n \leq t \leq 2n+1 \\ & \\ 0 & altrove \end{cases}$$

a) $F(s) = \frac{-se^{-s} - e^{-s} + 1}{s^2(1-e^{2s})}$ $\qquad s \in C$

b) $F(s) = \frac{-se^{-s} - e^{-s} + 1}{s^2(1-e^{-2s})}$ $\qquad Re(s) > 0$

c) $F(s) = \frac{-se^{-s} - e^{-s} + 1}{s(1+e^{-2s})}$ $\qquad Re(s) > 0$

Soluzione: b) usare la formula della trasformata di un segnale periodico.