Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello dell' 11 aprile 2014

Esercizio 1. Calcolare, usando i metodi della variabile complessa,

$$\int_\gamma (\bar{z} - 4) \cos z \, dz$$

dove γ é la curva definita da $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$. (Se $z = x + iy$, $\bar{z}$ denota il suo coniugato $\bar{z} = x - iy$. Si suggerisce di usare che $\bar{z} = \frac{z\bar{z}}{z} = \frac{|z|^2}{z}$, $\forall z \neq 0$)

Soluzione:

Moltiplicando e dividendo la funzione integranda per z, sfruttando il suggerimento ed il fatto che su γ risulta che $|z| = 2$, si ottiene

$$\int_\gamma (\bar{z} - 4) \cos z \, dz = \int_\gamma \frac{|z|^2}{z} \cos z - 4 \int_\gamma \cos z dz = 4 \int_\gamma \frac{\cos z}{z} dz = 8\pi i.$$

Esercizio 2.

(i) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di centro $3i$ in un intorno forato di $3i$ della seguente funzione

$$f(z) = \frac{z + 3i}{(z^2 + 9)(z + 7i)};$$

precisando il raggio di tale intorno.

(ii) Dopo aver calcolato lo sviluppo, dire di che tipo di singolaritá é il punto $3i$ e calcolare il residuo.

Soluzione:

(i) Osservando che

$$f(z) = \frac{z + 3i}{(z^2 + 9)(z + 7i)} = \frac{z + 3i}{(z + 3i)(z - 3i)(z + 7i)} = \frac{1}{(z - 3i)(z + 7i)}$$

lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $3i$ di f é dato da

$$\frac{1}{(z - 3i)(z + 7i)} = \frac{1}{(z - 3i)(z - 3i + 10i)} = \frac{1}{10i} \frac{1}{(z - 3i)} \frac{1}{1 - (-\frac{z-3i}{10i})} =$$

$$\frac{1}{10i} \frac{1}{(z - 3i)} \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z - 3i)^n}{(10i)^n} = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{(z - 3i)^{n-1}}{(10i)^{n+1}}.$$

Il raggio dell'intorno é 10.

(ii) Il punto $3i$ risulta essere un polo del primo ordine. Inoltre il residuo vale $\frac{1}{10i}$.

Esercizio 3.

(i) Individuare l' insieme di definizione I, di convergenza puntuale A e la funzione limite $f(x, y)$, della seguente successione di funzioni in due variabili

$$f_n(x, y) = \frac{1}{(x + y - 4)^{2n}}$$

(ii) Dire se la convergenza é uniforme in A e, in caso contrario, trovare almeno un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione:

(i) L'insieme di definizione I é dato da $I = \{x + y - 4 \neq 0\}$. L'insieme A di convergenza puntuale é

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 5\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 3\}.$$

La successione converge in A alla funzione di due variabili data da

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x + y > 5 \vee x + y < 3 \\ 1 & \text{se} \quad x + y = 5 \vee x + y = 3 \end{cases}$$

(ii) In A non c é convergenza uniforme perché la funzione limite é discontinua. C'é convergenza uniforme ad esempio in ogni insieme del tipo $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq \alpha > 5\}$.

Esercizio 4. Trovare l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$f(z) = Log(i(z + 2)).$$

Soluzione:

Poiché si ha

$$i(z + 2) = i(x + iy + 2) = ix - y + 2i = (x + 2)i - y,$$

l'insieme di definizione é dato da $\{(x, y) \neq (-2, 0)\}$.
Inoltre la funzione risulta continua ed olomorfa in $\mathbb{C} \setminus \{(x, y) : x = -2, y \geq 0\}$.

Esercizio 5. Calcolare

$$\int_\gamma |z| dz$$

nei seguenti due casi:

(a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$;

(b) $\gamma(t) = -t$, $-1 \leq t \leq 1$.

Soluzione:

(a)

$$\int_0^\pi |e^{it}| ie^{it} dt = \int_0^\pi ie^{it} dt = e^{i\pi} - 1 = -2.$$

(b)

$$-1 \int_{-1}^1 |t| dt = -2 \int_0^1 t dt = -1.$$