Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello dell' 11 aprile 2014 (Fila 2)

Esercizio 1. Calcolare, usando i metodi della variabile complessa,

$$\int_\gamma \bar{z}^2 senz\, dz$$

dove γ é la curva definita da $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi)$. (Se $z = x + iy$, $\bar{z}$ denota il suo coniugato $\bar{z} = x - iy$. Si suggerisce di usare che $\bar{z} = \frac{z\bar{z}}{z} = \frac{|z|^2}{z}$, $\forall z \neq 0$)

Soluzione:

Moltiplicando e dividendo la funzione integranda per z^2, sfruttando il suggerimento ed il fatto che su γ risulta che $|z| = \frac{1}{2}$, si ottiene

$$\int_\gamma \frac{|z|^4}{z^2} \sin z dz = \frac{1}{16}\int_\gamma \frac{\sin z}{z^2} dz = \frac{1}{16} 2\pi i = \frac{1}{8}\pi i$$

Esercizio 2.

(i) Scrivere lo sviluppo in serie di Laurent di centro $-5i$ in un intorno forato di $-5i$ della seguente funzione

$$f(z) = \frac{z - 5i}{(z^2 + 25)(z + 2i)}$$

precisando il raggio di tale intorno.

(ii) Dopo aver calcolato lo sviluppo, dire di che tipo di singolaritá é il punto $-5i$ e calcolare il residuo.

Soluzione:

(i) Osservando che

$$f(z) = \frac{z - 5i}{(z^2 + 25)(z + 2i)} = \frac{z - 5i}{(z - 5i)(z + 5i)(z + 2i)} = \frac{1}{(z + 5i)(z + 2i)}$$

lo sviluppo in serie di Laurent centrato in $-5i$ di f é dato da

$$\frac{1}{(z + 5i)(z + 2i)} = \frac{1}{(z + 5i)(z + 5i - 3i)} = \frac{1}{-3i}\frac{1}{(z + 5i)}\frac{1}{(1 - \frac{z+5i}{3i})} =$$

$$\frac{1}{-3i}\frac{1}{(z + 5i)}\sum_{n\geq 0}\frac{(z + 5i)^n}{(3i)^n} = -\sum_{n\geq 0}\frac{(z + 5i)^{n-1}}{(3i)^{n+1}}.$$

Il raggio dell'intorno é 3.

(ii) Il punto $-5i$ risulta essere un polo del primo ordine. Inoltre il residuo vale $-\frac{1}{3i}$.

Esercizio 3.

(i) Individuare l' insieme di definizione I, di convergenza puntuale A e la funzione limite $f(x, y)$, della seguente successione di funzioni in due variabili

$$f_n(x, y) = \frac{1}{(3 - x + y)^n}$$

(ii) Dire se la convergenza é uniforme in A e, in caso contrario, trovare almeno un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione:

(i) L'insieme di definizione I é dato da $I = \{3 - x + y \neq 0\}$. L'insieme A di convergenza puntuale é

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \leq 2\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq 4\}.$$

La successione converge alla funzione di due variabili data da

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; x - y < 2 \vee x - y > 4 \\ 1 & \text{se } \; x - y = 2 \vee x - y = 4 \end{cases}$$

(ii) In A non c é convergenza uniforme perché la funzione limite é discontinua. C'é convergenza uniforme ad esempio nell'insieme $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x - y \geq \alpha > 4\}$.

Esercizio 4. Trovare l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^{iz} - 5}$$

Soluzione:

L'insieme di definizione coincide con l'aperto di olmorfia ed é dato da

$$z \neq \frac{1}{i} \log 5 = \frac{1}{i}(\log 5 + 2k\pi i), \; k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 5. Calcolare

$$\int_\gamma |z| dz$$

nei seguenti due casi:

(a) $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi$;

(b) $\gamma(t) = -t$, $-1 \leq t \leq 1$.

Soluzione:

(a)

$$\int_0^\pi |e^{it}| i e^{it} dt \int_0^\pi i e^{it} dt = e^{i\pi} - 1 = -2.$$

(b)

$$-1 \int_{-1}^1 |t| dt = -2 \int_0^1 t dt = -1.$$