Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello dell'11 luglio 2014

Esercizio 1. Data la funzione periodica di periodo π e definita nell'intervallo $[0, \pi)$ come

$$f(x) = x \cos x,$$

i) dire se la sua serie di Fourier converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e dire quanto vale la sua somma $S(x)$ per ogni punto $x \in \mathbb{R}$.

ii) Calcolare $S(\frac{5}{4}\pi)$ e $S(5\pi)$.

Soluzione:

i) La serie di Fourier di $f(x)$ converge puntualmente in $\mathbb{R}$ e ha per somma

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

in quanto $f(x)$ risulta essere periodica e regolare a tratti in $\mathbb{R}$.

ii) Poiché $\frac{5}{4}\pi$ é un punto di continuitá per $f(x)$ si ha $S(\frac{5}{4}\pi) = S(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{8}\sqrt{2}$.

iii) Poiché 5π é un punto di discontinuitá per $f(x)$ si ha $S(5\pi) = S(\pi) = -\frac{\pi}{2}$.

Esercizio 2. Data la seguente successione di funzioni in campo complesso

$$f_n(z) = \frac{(|z| - 2)^n}{\sqrt{n}} \qquad z \in \mathbb{C}$$

studiarne la convergenza puntuale ed uniforme.

Soluzione:

La successione di funzioni converge uniformemente a $f(z) \equiv 0$ nell'insieme

$$A = \{z \in \mathbb{C} : ||z| - 2| \leq 1\}$$

ovvero nella corona circolare $1 \leq |z| \leq 3$.
Infatti basta porre $|z| - 2 = t \in \mathbb{R}$ e osservare che la successione di variabile reale $(f_n(t))_{n \in N}$ converge puntualmente a $f(t) \equiv 0$ per $|t| \leq 1$. Inoltre la convergenza é uniforme nello stesso insieme in quanto

$$g_n = \sup_{\{|t| \leq 1\}} |f_n(t)| = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

e

$$\lim_{n \to \infty} g_n = 0.$$

Esercizio 3. Calcolare, usando la trasformata di Laplace, il segnale che soddisfa il seguente problema

$$\begin{cases} y''(t) - \int_0^t y(\tau) d\tau = e^t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione:

Posto $Y(s) = L[y](s)$, si ha

$$s^2 Y(s) - \frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s - 1}$$

da cui

$$Y(s) = \frac{s}{(s-1)^2 (s^2 + s + 1)}.$$

La singolaritá della funzione sono $s=1$ (polo doppio) e $s=\frac{-1\pm i\sqrt{3}}{2}$ (poli semplici).
Pertanto risulta che

$$y(t)=res(\frac{e^{st}s}{(s-1)^2(s^2+s+1)},1)+res(\frac{e^{st}s}{(s-1)^2(s^2+s+1)},-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})+res(\frac{e^{st}s}{(s-1)^2(s^2+s+1)},-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})=$$

$$\frac{te^t}{3}+\frac{(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})e^{(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})t}}{\frac{i3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}}+\frac{(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})e^{(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})t}}{-\frac{i3\sqrt{3}}{2}+\frac{9}{2}}$$

$$=\frac{te^t}{3}-\frac{2\sqrt{3}}{9}e^{-\frac{1}{2}t}sen(\frac{\sqrt{3}t}{2}).$$

Esercizio 4 (D1)**.** Calcolare, al variare del parametro k nell'insieme $\{-1,0,1,2,3,\dots\}$ il seguente integrale

$$\int_\gamma (e^z-1)^k dz$$

dove $\gamma(t)=re^{it}$, $t\in[0,2\pi)$, $0<r<2\pi$.

Soluzione:

Per $k\geq 0$ risulta che $\int_\gamma (e^z-1)^k dz=0$ (per il teorema di Cauchy).
Per $k=-1$ si ha che la funzione integranda $f(z)=\frac{1}{e^z-1}$ presenta i seguenti punti singolari:

$$z_h=2h\pi i, h\in\mathbb{Z}.$$

Di tali punti, risulta che soltanto $z_0=0$ (polo semplice) é interno a γ. Pertanto, per il teorema dei residui

$$\int_\gamma \frac{1}{e^z-1}dz=2\pi i res(f(z),0)=2\pi i.$$

Esercizio 5 (D2)**.** Provare (senza calcolare gli integrali) che se γ_1 e γ_2 sono le curve definite da

$$\gamma_1(t)=(\frac{1}{2}+i)+\frac{1}{2}e^{it}\quad 0\leq t\leq\pi$$

$$\gamma_2(t)=1+i-t\quad 0\leq t\leq 1$$

allora i due integrali

$$\int_{\gamma_1} z^2\sin z dz$$

$$\int_{\gamma_1} z^2\sin z dz$$

sono uguali.

Soluzione:

Risulta che $\gamma_1(0)=1+i$ e $\gamma_1(\pi)=i$ (dove γ_1 é la semicirconferenza di centro $\frac{1}{2}+i$ e raggio $\frac{1}{2}$) e $\gamma_2(0)=1+i$, $\gamma_2(1)=i$ (segmento con gli stessi estremi di γ_1).
Poiché la funzione $z^2\sin z$ olomorfa in $\mathbb{C}$, per il teorema integrale di Cauchy, l'integrale lungo una qualunque curva chiusa regolare é nullo. In particolare é nullo l'integrale lungo la curva chiusa γ ottenuta concatenando le due curve γ_1 e γ_2^- Pertanto gli integrali di $z^2\sin z$ calcolati lungo γ_1 e γ_2 coincidono.