ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 13 febbraio 2014

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve

$$\begin{cases} y' * y = \int_0^t y(\tau)d\tau \\ y(0) = a \end{cases}$$

con $a \in R$.

Determinare poi a in modo che $y(2) = 5$.

Posto $L[y(t)](s) = Y(s)$, usando le proprietá della trasformata si ha

$$\big(sY(s) - a\big)Y(s) = \frac{Y(s)}{s}$$

Se $Y(s) = 0$ per ogni s allora $y(t) = 0$ per ogni t e tale funzione risolve il problema solo con $a = 0$ e non verifica evidentemente $y(2) = 5$.

Se $Y(s)$ non é la funzione nulla si divide per $Y(s)$ e si ottiene

$$sY(s) - a = \frac{1}{s}$$

da cui

$$Y(s) = \frac{a}{s} + \frac{1}{s^2}$$

e quindi

$$y(t) = aH(t) + t$$

Per avere $y(2) = 5$ deve essere $a = 3$.

E 2 Data la funzione

$$u(x, y) = 2x + 3y$$

si determini una funzione $v(x, y)$ in modo tale che $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia olomorfa in C e che si abbia $v(1, 0) = 1$.

Dalle condizioni di Cauchy-Riemann

$$v_y(x, y) = u_x(x, y) = 2$$
$$v_x(x, y) = -u_y(x, y) = -3$$

Da cui, integrando la prima rispetto a y e la seconda rispetto a x

$$v(x, y) = 2y + h(x) + c_1$$
$$v(x, y) = -3x + g(y) + c_2$$

Si prende $h(x) = -3x$, $g(y) = 2y$, $c_1 = c_2$ e si ottiene $v(x, y) = 2y - 3x + c_1$, da cui, imponendo la condizione $v(1, 0) = 1$, si ottiene $c - 1 = 4$.

E 3 Scrivere lo sviluppo di Laurent della funzione

$$f(z) = \frac{1}{(z+2i)(z-5)}$$

attorno al punto $z = -2i$ nelle due regioni del piano complesso in cui ció é possibile .

Le due regioni sono

$$0 < |z+2i| < \sqrt{29}$$

e

$$|z+2i| > \sqrt{29}.$$

Nella prima regione, scrivendo $z-5 = z+2i-2i-5 = (-2i-5)(1-\frac{z+2i}{2i-5})$ si ottiene

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^{n-1}}{(2i+5)^{n+1}}$$

Nella seconda regione, scrivendo $z-5 = z+2i-2i-5 = (z+2i)(1-\frac{2i+5}{z+2i})$ si ottiene

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i+5)^n}{(z+2i)^{n+2}}$$

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ________________ 1.4

D 1 Dimostrare che l'insieme E degli zeri di una funzione analitica in C non identicamente nulla non puó contenere una curva.

Una curva non é un insieme costituito interamente da punti isolati (provare il principio degli zeri isolati).

Nome e Cognome ________________________________ **matricola** ____________________ 1.5

D2

(i) Enunciare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata per successioni di funzioni reali di variabile reale.

(ii) Individuare l'insieme di definizione, l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della seguente successione di funzioni in due variabili

$$f_n(x,y) = \frac{1}{(\log|x+y|-1)^{2n}}$$

(iii) Dire se la convergenza é uniforme e, in caso contrario, trovare almeno un insieme di convergenza uniforme.

Insieme di definizione

$$I_{def} = \{(x,y) \in R^2 : x+y \neq 0,\ x+y \neq \pm e\}$$

Insieme di convergenza puntuale

$$A = \{(x,y) \in R^2 : |x+y| \geq e^2\} \cup \{(x,y) \in R^2 : |x+y| \leq 1\}$$

Funzione limite

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & |x+y| > e^2, \quad |x+y| < 1 \\ \\ 1 & |x+y| = e^2, \quad |x+y| = 1 \end{cases}$$

Non si puó avre convergenza uniforme in tutto l'insieme di convergenza puntuale A perché in A la funzione limite é discontinua. Si ha convergenza uniforme ad esempio in tutti gli insieme della forma

$$B_\alpha = \{(x,y) \in R^2 : |x+y| \geq \alpha > e^2\}$$

con $\alpha > e^2$ arbitrario.

Infatti

$$g_n = \sup_{|x+y| \geq \alpha} \frac{1}{(log|x+y|-1)^{2n}} = \frac{1}{(log\alpha - 1)^{2n}}$$

$$\lim_n g_n = 0$$