Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni dell'appello del 13 febbraio 2014.

Esercizio 1. Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve

$$\begin{cases} y'(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau \\ \\ y(0) = a \\ \end{cases}$$

con $a \in (0, +\infty)$.
Determinare poi a in modo che $y(3) = 2$.

Soluzione:
Ponendo $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$, e ricordando che $\mathcal{L}[y'](s) = s\mathcal{L}[y](s) - y(0)$, sostituendo nel problema si ha:

$$sY(s) - a = \frac{Y(s)}{s}$$

da cui

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 - 1}a.$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(t) = a \cosh t.$$

Imponendo ora che $y(3) = 2$, si trova che

$$a = \frac{2}{\cosh 3}.$$

Si osservi che se $a = 0$ allora $Y(s) \equiv 0$ e $y(t) = 0$. In questo caso é evidente che $y(3) = 2$ non é mai soddisfatta.

Esercizio 2. Data la funzione

$$v(x, y) = x^2 - y^2 + y$$

si determini una funzione $u(x, y)$ in modo tale che $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ sia olomorfa in C e che si abbia $u(3, 0) = 2$.

Soluzione:

Utilizzando le condizioni di Cauchy-Riemann si trova che:

$$u_x = v_y = -2y + 1, \quad u_y = -v_x = -2x,$$

per cui dalla prima condizione si ottiene

$$u(x, y) = -2xy + x + g(y) + C_1$$

mentre dalla seconda si ha

$$u(x, y) = -2xy + h(x) + C_2.$$

Ne segue che

$$h(x) = x, \quad g(y) = 0, \quad C_1 = C_2 = C.$$

Pertanto

$$u(x, y) = -2xy + x + C.$$

Per trovare il valore di C imponiamo che $u(3, 0) = 2$, da cui

$$u(3, 0) = 3 + C = 2$$

ovvero $C = -1$. Pertanto $u(x, y) = -2xy + x - 1$ é la funzione cercata.

Esercizio 3. Data la funzione
$$f(z)=\frac{1}{(z-i)(z-5)}$$
individuare le due corone circolari di centro $z=5$ in cui essa é sviluppabile in serie di Laurent (di centro il punto $z=5$) e trovare lo sviluppo nelle due regioni.

Soluzione:

La funzione $f(z)$ é sviluppabile in serie di Laurent nelle seguenti corone circolari di centro $z=5$:

- $0<|z-5|<\sqrt{26}$;
- $|z-5|>\sqrt{26}$.

In $0<|z-5|<\sqrt{26}$ la funzione presenta il seguente sviluppo:

$$f(z)=\frac{1}{z-5}\frac{1}{z-5+5-i}=\frac{1}{z-5}\frac{1}{5-i}\frac{1}{1+\frac{z-5}{5-i}}=\frac{1}{z-5}\frac{1}{5-i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-5)^n}{(5-i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-5)^{n-1}}{(5-i)^{n+1}}.$$

Mentre in $|z-5|>\sqrt{26}$ la funzione é sviluppabile nel seguente senso:

$$f(z)=\frac{1}{z-5}\frac{1}{z-5}\frac{1}{1+\frac{5-i}{z-5}}=\frac{1}{(z-5)^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(5-i)^n}{(z-5)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(5-i)^n}{(z-5)^{n+2}}.$$

Si ottiene lo stesso risultato scomponendo la funzione in fratti semplici. Infatti

$$f(z)=\frac{1}{(z-i)(z-5)}=\frac{1}{i-5}\frac{1}{z-i}+\frac{1}{5-i}\frac{1}{z-5}.$$

In particolare in $0<|z-5|<\sqrt{26}$, studiando il termine $\frac{1}{i-5}\frac{1}{z-i}$ si ha che

$$\frac{1}{i-5}\frac{1}{z-i}=\frac{1}{i-5}\frac{1}{z-5+5-i}=-\frac{1}{(i-5)^2}\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-5}{5-i}\right)^n=\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-5)^n}{(5-i)^{n+2}},$$

pertanto la $f(z)$ presenta in tale corona lo sviluppo

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-5)^n}{(5-i)^{n+2}}+\frac{1}{5-i}\frac{1}{z-5}.$$

Mentre, sviluppando il termine $\frac{1}{i-5}\frac{1}{z-i}$ si avrá

$$\frac{1}{i-5}\frac{1}{z-i}=\frac{1}{i-5}\frac{1}{z-5+5-i}=\frac{1}{i-5}\frac{1}{z-5}\frac{1}{1+\frac{5-i}{z-5}}=\frac{1}{i-5}\frac{1}{z-5}\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{5-i}{z-5}\right)^n=$$
$$\frac{1}{i-5}\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^n\frac{(5-i)^n}{(z-5)^{n+1}}=\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(5-i)^{n-1}}{(z-5)^{n+1}}.$$

Pertanto in $|z-5|>\sqrt{26}$ la funzione presenterá il seguente sviluppo:

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(5-i)^{n-1}}{(z-5)^{n+1}}+\frac{1}{5-i}\frac{1}{z-5}.$$

Esercizio 4. Dimostrare che una funzione analitica in C non identicamente nulla non si puó annullare su un segmento.

Soluzione:

Una funzione analitica in $\mathbb{C}$ non identicamente nulla, per il principio degli zeri isolati, si annulla su un insieme costituito da punti isolati e privo di punti di accumulazione. Pertanto, poiché un segmento non é un insieme costituito interamente da punti isolati, la funzione non puó annullarsi su di esso.

Esercizio 5.

(i) Dare la definizione di convergenza puntuale e uniforme per una successione di funzioni $(f_n(x))_{n\in N}$, $x \in R$.

(ii) Individuare l'insieme di definizione, l'insieme di convergenza puntuale e la funzione limite della seguente successione di funzioni in due variabili

$$f_n(x,y) = \frac{1}{(e^{|x-y|} - 1)^{2n}}$$

(iii) Dire se la convergenza é uniforme e, in caso contrario, trovare almeno un insieme di convergenza uniforme.

Soluzione:

ii) L'insieme di definizione é $I = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\}$.
L'insieme di convergenza puntuale é $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \geq \log 2\}$.
La successione di funzioni converge puntualmente alla funzione limite

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x-y| > \log 2 \\ 1 & \text{se } |x-y| = \log 2. \end{cases}$$

iii) Poiché la funzione limite é discontinua, non possiamo sperare di avere convergenza uniforme in A, essendo $f_n(x,y)$ una successione di funzioni continue in A.
La successione di funzioni $f_n(x,y)$ converge uniformemente in ogni insieme del tipo $\{(x,y) : |x-y| \geq \alpha > \log 2\}$, $\alpha > \log 2$ arbitrario.
Infatti, se $\alpha > \log 2$ si ha:

$$g_n = \sup_{|x-y|\geq\alpha} \frac{1}{(e^{|x-y|} - 1)^{2n}} = \frac{1}{(e^{\alpha} - 1)^{2n}}$$

e risulta

$$lim_{n\to\infty} \frac{1}{(e^{\alpha} - 1)^{2n}} = 0.$$