METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 13 settembre 2021

Nome e Cognome ____ **matricola** __________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

Data la successione di funzioni di variabile complessa, definita per $z \in C$ da

$$f_n(z) = e^{nz^2}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(z)$

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Risposta:

$$A = A_1 \cup A_2 = \{z = x + iy = |x| < |y|\} \cup \{z = \pm\sqrt{k\,\pi}(1+i), \quad k \in Z\}$$

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z \in A_1 \\ \\ 1 & z \in A_2 \end{cases}$$

Non si ha convergenza uniforme in tutto A perchè $f(z)$ è discontinua in A.

Si ha convergenza uniforme, come facilmente si verifica in tutti gli insiemi

$$B_\alpha = \{z = x + iy : x^2 - y^2 \le \alpha < 0\}$$

E 2

Data la funzione $f(z) = z^3\Big(1 - cos\left(\frac{1}{z^h}\right)\Big)$, $h \in N - \{0\}$, calcolare , al variare di h il residuo della funzione nel punto $z_0 = 0$.

Calcolare inoltre l' integrale

$$\int_\gamma f(z)dz$$

dove γ è il bordo dell'insieme

$$T = \{z = x + iy \in C : \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \le 1\}$$

Enunciare il risultato teorico che è si usato.

Risposta:

$$f(z) = z^3\Big(1 - cos\left(\frac{1}{z^h}\right)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!\, z^{2nh-3}}$$

Pertanto

$$res(f(z),0) = \begin{cases} 0 & h \neq 1,2 \\ -\frac{1}{2} & h = 2 \\ \frac{1}{4!} & h = 1 \end{cases}$$

Per il teorema dei residui

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 0 & h \neq 1,2 \\ -\pi\, i & h = 2 \\ \frac{1}{12} & h = 1 \end{cases}$$

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

1) Dato il segnale $f(t)$ definito come

$$f(t) = \begin{cases} e^{(3+i)t} + \chi_{[10,13]}(t) & t > 5 \\ 6i & 0 \leq t \leq 5 \end{cases}$$

calcolare con calcolo esplicito (in base alla definizione) l'ascissa di convergenza e la trasformata di Laplace del segnale. La funzione $\chi_{[10,13]}(t)$ è la funzione caratteristica dell'intervallo $[10,13]$.

a)

$$\sigma[f] = -\infty \qquad L[f](s) = \frac{e^{(-3+s-i)5}}{-3+s-i} + \frac{e^{-10s} - e^{-13s}}{s}$$

b)

$$\sigma[f] = 3 \qquad L[f](t) = \frac{e^{(-3+t-i)5}}{-3+t-i} + \frac{e^{-10t} - e^{-13t}}{t}$$

c)

$$\sigma[f] = 3 \qquad L[f](s) = \frac{e^{(3-s+i)5}}{-3+s-i} + \frac{e^{-10s} - e^{-13s}}{s} + \frac{6i}{s}(1 - e^{-5s})$$

2) Data la seguente funzione $f(s)$, scrivere il suo sviluppo in serie di Laurent di centro $s_0 = 4$ in un intorno forato di tale punto, precisando il raggio di tale intorno e il suo sviluppo all'esterno di tale intorno:

$$f(s) = \frac{1}{(s-4)^2(s+i)}$$

a) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(s-4)^{n-2}}{(4+i)^{n+1}}$ se $|s+i| < \sqrt{17}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4+i)^n}{(s-4)^{n-3}}$ se $|s+i| > \sqrt{17}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(s-4)^{n-2}}{(4+i)^{n+1}}$ se $|s-4| < \sqrt{17}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4+i)^n}{(s-4)^{n-3}}$ se $|s-4| > \sqrt{17}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(s-4)^{n-1}}{(4+i)^n}$ se $|s-4| < \sqrt{5}$

$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(4+i)^{n+1}}{(s-4)^{n-3}}$ se $|s-4| > \sqrt{5}$

3) Calcolare con quattro cifre decimali esatte il seguente integrale, motivando i passaggi

$$\int_0^1 \frac{sen\,(x^5)}{x^3}\,dx$$

a)

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3!\,13} + \frac{1}{5!\,23} + \frac{1}{7!\,33}$$

b)

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3!\,13} - \frac{1}{5!\,23}$$

c)

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3!\,13} + \frac{1}{5!\,23}$$

Risposte: c), b), c)