METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 14 febbraio 2019

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

(i) Data la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \sum_{n=-4}^{+\infty} (z-2i)^n (|n|^3 - 1)$$

trovare l'insieme A in cui è analitica; trovare inoltre i suoi punti singolari, classificarli e calcolare il residuo in quei punti.

(ii) Facoltativo: verificare in questo caso la formula dei coefficienti c_n negli sviluppi in serie di Laurent

$$c_m = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-2i)^{m+1}} \quad \forall m \in Z,$$

con γ generica circonferenza di centro $2i$ contenuta nell'insieme di analiticità.

E 2 Calcolare, con i metodi della variabile complessa, il seguente integrale

$$(v.p.) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^3 - 2i)\, x} dx$$

.

E 3

(i) Individuare l'insieme di definizione I, l'insieme di convergenza puntuale A e la funzione limite $f(x,y)$ della seguente successione di funzioni di due variabili reali

$$f_n(x,y) = e^{-\left(\frac{y}{x+1}-n\right)^2}$$

(ii) Dire se la convergenza è uniforme in A. In caso contrario, trovare almeno un sottoinsieme di convergenza uniforme.

D 1

Partendo dallo sviluppo in serie di potenze di centro $x_0 = 0$ in campo reale della funzione $senh\,(x)$

$$senh\,(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad x \in R,$$

provare che il medesimo sviluppo vale in tutto il campo complesso, cioè

$$senh\,(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad z \in C.$$

D2

E' noto che la trasformata di Laplace $L[f(t)]$ di un segnale $f(t)$ è funzione olomorfa nel semipiano $Re(s) > \sigma[f]$.

(i) Dire quanto vale la sua derivata in senso complesso $\frac{d}{ds}L[f(t)]$, motivando formalmente il risultato.

(ii) Fornire un esempio di funzione $F(s)$ che non è olomorfa in alcun semipiano $Re(s) > \sigma_0$ e che pertanto non è trasformata di alcun segnale $f(t)$.