ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 14 giugno 2013

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare il seguente integrale di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{e^z}{(2(z-i)+1)^2}\,dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme T definito da

$$T = \{z = x + iy \in C : \frac{1}{2}x^2 + x + 1 \leq y \leq 2\}$$

.

R: $\frac{\pi i}{2} e^{i-\frac{1}{2}}$ (Si usa il teorema dei residui. Unico punto singolare é $z_0 = i - \frac{1}{2}$, polo doppio, interno a γ, con residuo $\frac{1}{4}\lim_{z\to z_0}(e^z)' = \frac{1}{4}e^{i-\frac{1}{2}}$)

E 2 Data $f(z)$ definita come

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{4} \frac{(z-i)^n}{3^{n+3}},$$

individuare l'insieme dove essa é analitica

R: $|z-i| > 3$ ($f(z)$ é somma di una serie di Laurent e, come tale, é analitica nella corona circolare aperta dove convergono sia la parte regolare che la parte singolare. La parte regolare é composta da un numero finito di termini e dunque converge in tutto C. La parte singolare puó essere riscritta, con la posizione $\frac{1}{z-i} = w$, come $\sum_{n=1}^{\infty} w^n 3^{n-3}$ che é una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho = \frac{1}{3}$.)

E 3 Data la successione di funzioni di due variabili reali

$$f_n(x,y) = \frac{n^3}{n^3(x^2+2y)^2+\sqrt{n}}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x,y)$.

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di conveuniforme.

R: Insieme di definizione R^2; insieme di convergenza puntuale $A = R^2 - \{(x,y) : x^2+2y = 0\}$; funzione limite $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+2y)^2}$; non si ha convergenza uniforme in tutto A, ma nei sottoinsiemi $A_\alpha = \{(x,y) : |x^2+2y| \geq \alpha\}$, $\alpha > 0$ arbitrario.)

Nome e Cognome ____**matricola** ______________________ 1.4

D 1

(i) Provare la formula per la trasformata di Laplace di un segnale ritardato

(i) Trovare il segnale $y_n(t)$ che risolve il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) - 2ny(t) = 1 \\ \\ y(n) = 0 \\ \\ y'(n) = 2 \end{cases}$$

e calcolare $\lim_{n\to\infty} y_n(t)$.

R: $y_n(t) = -\frac{1}{2n} + \sqrt{\frac{2}{n}} senh(\sqrt{2n}(t-n)) + \frac{1}{2n} cosh(\sqrt{2n}(t-n))$, $lim_{n\to+\infty} y_n(t) = -\infty$, $\forall t \geq 0$.(Le condizioni iniziali non sono assegnate in $t = 0$, bisogna fare la sostituzione $\tilde{y}_n(t) = y_n(t+n)$))

D 2

(i) Provare che una funzione olomorfa in A ammette primitiva in ogni aperto semplicemente connesso $A' \subseteq A$.

(ii) Provare che la funzione $f(z) = sen\,(\frac{1}{z^2})$, olomorfa in $A = C^*$, ammette primitiva in C^*, pur non essendo C^* semplicemente connesso (sugg: non provare a calcolare la primitiva).

R:

(i) Si tratta del corollario del Teorema integrale di Cauchy.

(ii) L'integrale su ogni curva chiusa γ generalmente regolare contenuta in C^* é nullo (ovviamente se $z_0 = 0$ non cade entro γ e per il teorema dei residui in caso contrario). Ció é equivalente all'esistenza di una primitiva in C^* per $f(z)$.