ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 14 giugno 2013

Nome e Cognome ________________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare il seguente integrale di funzione di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{e^{z^2}}{(3(z-1)+i)^2}\,dz$$

dove γ é il bordo dell'insieme T definito da

$$T = \{z = x + iy \in C : \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1 \leq y \leq 0\}$$

.

R: $\frac{4\pi i}{9}(1-\frac{i}{3})e^{(1-\frac{i}{3})^2}$ (Si usa il teorema dei residui. Unico punto singolare é $z_0 = 1 - \frac{i}{3}$, polo doppio, interno a γ, con residuo $\frac{1}{9}\lim_{z\to z_0}(e^{z^2})' = \frac{2}{9}(1-\frac{i}{3})e^{(1-\frac{i}{3})^2}$

E 2 Data $f(z)$ definita come

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{10} \frac{(z-3)^n}{4^{n-5}},$$

individuare l'insieme dove essa é analitica .

R: $|z-3| > 4$ ($f(z)$ é somma di una serie di Laurent e, come tale, é analitica nella corona circolare aperta dove convergono sia la parte regolare che la parte singolare. La parte regolare é composta da un numero finito di termini e dunque converge in tutto C. La parte singolare puó essere riscritta, con la posizione $\frac{1}{z-3} = w$, come $\sum_{n=1}^{\infty} w^n 4^{n+5}$ che é una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho = \frac{1}{4}$.)

E 3 Data la successione di funzioni di due variabili reali

$$f_n(x,y) = \frac{n^6}{n^6(y^2+3x)^2+n^5}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x,y)$.

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

R: Insieme di definizione R^2; insieme di convergenza puntuale $A = R^2 - \{(x,y) : y^2+3x = 0\}$; funzione limite $f(x,y) = \frac{1}{(y^2+3x)^2}$; non si ha convergenza uniforme in tutto A, ma nei sottoinsiemi $A_\alpha = \{(x,y) : |y^2+3x| \geq \alpha\}$, $\alpha > 0$ arbitrario.)

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ____________________ 2.4

D 1

(i) Provare la formula per la trasformata di Laplace di un segnale ritardato

(i) Trovare il segnale $y_n(t)$ che risolve il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(t) + n^2 y(t) = 5 \\ \\ y(n) = 0 \\ \\ y'(n) = 1 \end{cases}$$

e calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}$

R: $y_n(t) = \frac{5}{n^2} - \frac{5}{n^2} cos(n(t-n)) + \frac{1}{n} sen(n(t-n))$, $lim_{n\to+\infty} y_n(t) = 0 \quad \forall t \geq 0$.(Le condizioni iniziali non sono assegnate in $t = 0$, bisogna fare la sostituzione $\tilde{y}_n(t) = y_n(t+n)$))

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ________________ 2.5

D 2

(i) Provare che se una funzione f(z) ammette primitiva in un aperto A allora

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

per ogni curva regolare chiusa $\gamma \subseteq A$.

(ii) Provare che, se $f(z) = \frac{1}{z^2}$ e γ é una qualunque curva regolare congiungente due punti z_1 e z_2 di C^* con $z_1 \neq z_2$, allora $\int_\gamma f(z)dz$ é indipendente da γ. .

R: la funzione $f(z) = \frac{1}{z^2}$ ammette primitiva in C^* $(F(z) = \frac{1}{z} + c)$, dunque il suo integrale lungo una curva γ dipende solo dagli estremi di γ.