METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 15 luglio 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

Esercizio 1

Data la funzione periodica di periodo π e definita nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ come

$$f(x) = x\, e^x,$$

dopo aver ricordato la nozione di convergenza in media quadratica e l'eguaglianza di Parseval,

(i) studiare la convergenza puntuale, totale e in media quadratica della sua serie di Fourier e dire quanto vale la sua somma $S(x)$ per ogni punto $x \in R$.

(ii) Calcolare $S(\frac{3}{2}\pi)$ e $S(5\pi)$

Risposta:

(i) La serie di Fourier converge puntualmente in R (perchè $f(x)$ è regolare a tratti in R), non totalmente (perchè $f(x)$ non è continua in R), converge in media quadratica (perchè $f(x)$ è di quadrato sommabile in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$).

$$S(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ \frac{\pi}{4}(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{\frac{-\pi}{2}}) & x = \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

(ii)

$$S(\frac{3}{2}\pi) = S(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{4}(e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}),$$

$$S(5\pi) = f(5\pi) = f(0) = 0.$$

Esercizio 2

Data la seguente successione di funzioni in campo complesso

$$f_n(z) = (|z-1| - 2)^n n^\beta \quad z \in C \quad \beta \in R$$

studiarne la convergenza puntuale ed uniforme al variare di β.

Risposta: Per $\beta > 0$ l'insieme di convergenza puntuale è $A = \{z : 1 < |z-1| < 3\}$ e la successione converge a $f(z) = 0$. Non converge uniformemente in A (perchè $g_n = n^\beta$ e dunque $\lim_{n\to\infty} g_n = +\infty$.). Converge uniformemente in ogni corona circolare $B_a = \{z : 2-a < |z-1| < 2+a\}$ con $0 < a < 1$ (perchè in questo caso $g_n = a^n n^\beta \quad 0 < a < 1$ e dunque $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$.)

Per $\beta = 0$ l'insieme di convergenza puntuale è $A = \{z : 1 < |z-1| \leq 3\}$ e la successione converge a

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z \in \{z : 1 < |z-1| < 3\} \\ \\ 1 & |z-1| = 3 \end{cases}.$$

Data la discontinuità della funzione limite, non si ha convergenza uniforme in tutto A, ma solo nei sottoinsiemi $B_a = \{z : 2 - a < |z-1| < 2 + a\}$ con $0 < a < 1$ (dove $g_n = a^n \quad 0 < a < 1$ e dunque $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$.

Per $\beta < 0$ l'insieme di convergenza puntuale è $A = \{z : 1 \leq |z-1| \leq 3\}$, e la successione converge a $f(z) = 0$. La convergenza in A è anche uniforme (perch è $g_n = n^\beta$ e ora $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$.

Domande

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

D1)

Calcolare, al variare del parametro k nell'insieme $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1\}$, tutti i punti singolari della seguente funzione, classificarli e calcolare il residuo della funzione in ciascuno di essi

$$f(z) = \frac{1}{(\sin z)^k}.$$

a) nessun punto singolare se $k \leq 0$; $z_h = 2h\pi \quad h \in Z$ se $k = 1$, poli doppi, res $(f(z), 2h\pi) = 1$

b) nessun punto singolare se $k \leq 0$; $z_h = h\pi \quad h \in Z$ se $k = 1$, poli semplici, res $(f(z), h\pi) = (-1)^h$

c) per ogni k, unico punto singolare $z_0 = 0$ con res $(f(z), 0) = 1$

D2)

Calcolare, usando la trasformata di Laplace, il segnale che soddisfa il seguente problema

$$\begin{cases} y'(t) + \displaystyle\int_0^t y(\tau)\, d\tau = H(t-1) \\ \\ y(0) = 0 \\ \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

a) $y(t) = H(t-1)\, sen(t-1)$

b) $y(t) = H(t)\, cos(t-1)$

c)$y(t) = H(t)\, sen(t-1)$

D3)

Calcolare, usando il teorema di Torricelli- Barrow,

$$\int_\gamma z\, e^z dz$$

dove $\gamma(t) = (2+i) + \frac{1}{3}e^{it} \quad \frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{3}{2}\pi$

a) $(2 + i\frac{2}{3})e^{2+i\frac{2}{3}}$

b) $(1 + i\frac{4}{3})e^{2+i\frac{2}{3}} - (1 + i\frac{2}{3})e^{2+i\frac{4}{3}}$

c) $(1 + i\frac{2}{3})e^{2+i\frac{2}{3}} - (1 + i\frac{4}{3})e^{2+i\frac{4}{3}}$

Risposte: b), a), c)