Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello del 16 giugno 2014

Esercizio 1. Data la funzione di variabile complessa

$$F(z) = \frac{1}{(z^2-1)(z+i)^2},$$

provare che é la trasformata di Laplace di un segnale continuo $f(t)$ e ricostruirlo mediante la formula di inversione.

Soluzione:

I punti singolari di $F(z)$ sono $z = -i$ (polo doppio) e $z = \pm 1$ (poli semplici).
La funzione $F(z)$ é la trasformata di un segnale continuo perché é olomorfa nel semipiano $Re(s) > 1$ e si comporta come $\frac{1}{z^4}$ all'infinito.
La funzione $F(z)$ risulta essere la trasformata di Laplace del segnale $f(t)$ dato da

$$f(t) = res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2-1)(z+i)^2}, -i\right) + res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2-1)(z+i)^2}, 1\right) + res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2-1)(z+i)^2}, -1\right) = I + II + III.$$

In particolare

$$I = \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{zt}}{z^2-1}\right) = \frac{e^{-it}(-t+i)}{2},$$

$$II = \lim_{z\to 1} \frac{e^{zt}}{(z+1)(z+i)} = \frac{e^t}{4i},$$

$$III = \lim_{z\to -1} \frac{e^{zt}}{(z-1)(z+i)} = \frac{e^{-t}}{4i}.$$

Esercizio 2. Sia $H(t)$ la funzione gradino unitario. Posto

$$\delta_h(t) = \frac{H(t) - H(t-h)}{h} \quad h > 0,$$

calcolare

(i) $\lim_{h\to 0^+} \delta_h(t)$

(ii) $L[\delta_h(t)](s)$ (trasformata di Laplace)

Soluzione:

$i)$ Risulta

$$\lim_{h\to 0^+} \delta_h(t) = \begin{cases} +\infty & t = 0 \\ 0 & t > 0. \end{cases}$$

$ii)$ La trasformata di Laplace é data da

$$L[\delta_h(t)](s) = \frac{1 - e^{-sh}}{sh}.$$

Esercizio 3. Data la funzione in campo complesso

$$f(z) = \sum_{n=-3}^{-1} n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} log(n^2+2) z^n,\ z \in C$$

dire in quale regione del piano complesso é analitica. Individuare i punti singolari e calcolarne il residuo.

Soluzione:

Utilizzando il criterio del rapporto si trova che il raggio di convergenza della serie é $\rho = 1$, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log((n+1)^2+2)}{\log(n^2+2)} = 1.$$

La serie é analitica pertanto in $0 < |z| < 1$.
L'unico punto singolare é $z = 0$, che é un polo di ordine 3 con residuo $c_1 = -1$.

Esercizio 4 (D1). (i) Provare che se z_0 é una singolaritá di tipo eliminabile per $f(z)$, i coefficienti della parte singolare del suo sviluppo di Laurent in un intorno forato di z_0 sono tutti nulli.

(ii) Trovare i punti singolari di

$$f(z) = \frac{1}{sen\, z},$$

classificarli e calcolarne il residuo.

Soluzione:

(ii) I punti singolari di $f(z)$ sono gli zeri del denominatore, ovvero tutti e soli i punti che soddisfano

$$\sin z = 0 \iff z_k = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

In particolare si tratta di poli semplici, in quanto zeri del primo ordine del denominatore:

$$(\sin z)'_{|z=z_k} = (\cos z)_{|z=z_k} = (-1)^k \neq 0.$$

Ne segue che

$$res(f(z), z_k) = \frac{1}{(\sin z)'_{|z=z_k}} = \frac{1}{(-1)^k} = (-1)^k,\ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 5 (D2). Data la funzione $f(t)$ periodica di periodo 2π definita in $[1, 1+2\pi)$ da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t-1)^{1/6}} & \text{if } 1 < t < 1+2\pi \\ 3 \quad \text{if } t = 1 \end{cases}$$

mostrare, motivando la risposta, che

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = 0,$$

dove a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di $f(t)$.

Soluzione:

La funzione $f(t)$ risulta essere quadrato sommabile in $[1, 1+2\pi]$. Infatti

$$\int_1^{1+2\pi} (f(t))^2 dt = \frac{6}{5}(2\pi)^{\frac{5}{6}} < +\infty.$$

Vale dunque l'eguaglianza di Parseval:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_1^{1+2\pi} (f(t))^2 dt,$$

dove a_k, b_k sono i coefficienti di Fourier di $f(t)$.
Dalla condizione necessaria per la convergenza di una serie (numerica) segue che

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} b_k = 0.$$