Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello del 16 giugno 2014

Esercizio 1. Data la funzione di variabile complessa

$$F(z) = \frac{1}{(z^2+1)(z-2i)^2},$$

provare che é la trasformata di Laplace di un segnale continuo $f(t)$ e ricostruirlo mediante la formula di inversione.

Soluzione:

I punti singolari di $F(z)$ sono $z = 2i$ (polo doppio) e $z = \pm i$ (poli semplici).
La funzione $F(z)$ risulta essere la trasformata di Laplace del segnale $f(t)$ dato da

$$f(t) = res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2+1)(z-2i)^2}, 2i\right) + res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2+1)(z-2i)^2}, i\right) + res\left(\frac{e^{zt}}{(z^2+1)(z-2i)^2}, -i\right) = I + II + III.$$

In particolare

$$I = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\frac{e^{zt}}{z^2+1} = -\frac{e^{2it}(3t+4i)}{9},$$
$$II = \lim_{z\to i} \frac{e^{zt}}{(z+i)(z-2i)^2} = -\frac{e^{it}}{2i},$$
$$III = \lim_{z\to -i} \frac{e^{zt}}{(z-i)(z-2i^2)} = \frac{e^{-it}}{18i}.$$

Esercizio 2. Sia $H(t)$ la funzione gradino unitario. Posto

$$\delta_h(t) = \frac{H(t)-H(t-h)}{h} \qquad h > 0,$$

calcolare

(i) $L[\delta_h(t)](s)$ (trasformata di Laplace)

(ii) $\lim_{h\to 0^+} L[\delta_h(t)](s)$.

Soluzione:

i) La trasformata di Laplace é data da

$$L[\delta_h(t)](s) = \frac{1-e^{-hs}}{hs}.$$

ii) Risulta che

$$\lim_{h\to 0^+} L[\delta_h(t)](s) = 1 = L[\delta(t)].$$

Esercizio 3. Data la funzione in campo complesso

$$f(z) = \sum_{n=-5}^{-2} n(z-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}(e^n+2)(z-1)^n,\ z\in C$$

dire in quale regione del piano complesso é analitica. Individuare i punti singolari e calcolarne il residuo.

Soluzione:

Utilizzando il criterio del rapporto si trova che il raggio di convergenza della parte regolare della serie é $\rho = \frac{1}{e}$, infatti

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^{n+1}+2}{e^n+2} = e.$$

La serie é analitica pertanto nella corona circolare di centro $z_0 = 1$, ovvero in $0 < |z-1| < \frac{1}{e}$.
L'unico punto singolare é $z = 1$, che é un polo di ordine 5 con residuo $c_{-1} = 0$.

Esercizio 4 (D1). (i) Provare che se z_0 é una singolaritá di tipo essenziale per $f(z)$,la parte singolare del suo sviluppo di Laurent in un intorno forato di z_0 ha infiniti coefficienti diversi da zero.

(ii) Trovare i punti singolari di

$$f(z) = \frac{1}{cos\ z},$$

classificarli e calcolarne il residuo.

Soluzione:

(ii) I punti singolari di $f(z)$ sono gli zeri del denominatore, ovvero tutti e soli i punti che soddisfano

$$\cos z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}.$$

In particolare si tratta di poli semplici, in quanto zeri del primo ordine del denominatore:

$$(\cos z)'_{|z=z_k} = (-\sin z)_{|z=z_k} = (-1)^{k+1} \neq 0.$$

Inoltre

$$res(f(z), z_k) = \frac{1}{(\cos z)'_{|z=z_k}} = \frac{1}{(-1)^{k+1}} = (-1)^{k+1}, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Esercizio 5 (D2). Data la funzione $f(t)$ periodica di periodo 2π definita in $[2, 2+2\pi)$ da

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{(t-2)^{1/4}} & \text{if } 2 < t < 2+2\pi \\ 6 \quad \text{if } t = 2 \end{cases}$$

dire, motivando la risposta, se é di quadrato sommabile e se é continua a tratti.

Soluzione:

La funzione $f(t)$ risulta essere quadrato sommabile in $[2, 2+2\pi]$, poiché

$$\int_2^{2+2\pi} (f(t))^2 dt = 2(2\pi)^{\frac{1}{2}} < +\infty.$$

La funzione non é continua a tratti in $\mathbb{R}$ perché

$$\lim_{t \to 2^+} \frac{1}{(t-2)^{\frac{1}{4}}} = +\infty.$$