METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA

Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame 17 febbraio 2020

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare, usando i metodi della variabile complessa, il seguente integrale di variabile reale

$$(v.p)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega x}}{(x^2-i)(x+4)}\,dx,\quad \omega>0$$

$$= \underbrace{2\pi i \operatorname{res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{(z+4)(z^2-i)}, e^{i\frac{\pi}{4}}\right)}_{I} + \underbrace{\pi i \operatorname{res}\left(\frac{e^{i\omega z}}{(z+4)(z^2-i)}, -4\right)}_{II}$$

(lemma di Jordan e lemma del polo semplice)

$$I = \frac{e^{i\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}(1+i)+4\right)\sqrt{2}(1+i)} = \frac{e^{i\omega\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}}{4\sqrt{2}+2(1+2\sqrt{2})i}$$

$$II = \frac{e^{-i\omega 4}}{16-i}$$

E 2 Usare la trasformata di Laplace per trovare la soluzione $y(t)$ del seguente problema integro-differenziale

$$\begin{cases} y''(t) + 4\int_0^1 y(\tau)d\tau = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -3 \end{cases}$$

Calcolare (motivando) $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

Posto $Y(s) = \mathcal{L}[y(t)](s)$ si ha

$$s^2 Y(s) + 3 + 4\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s} \iff$$

$$Y(s) = \frac{1-3s}{s^3+4}$$

punti singolari $z = \sqrt[3]{-4} = \sqrt[3]{4}\, e^{i\left(\frac{\pi + 2k\pi}{3}\right)}$

$k = 0,1,2$, cioè

$z_0 = e^{+i\frac{\pi}{3}}\sqrt[3]{4}$, $z_1 = e^{i\pi}\cdot\sqrt[3]{4} = -\sqrt[3]{4}$,

$z_2 = e^{i\frac{5}{3}\pi}\cdot\sqrt[3]{4}$.

Formule di inversione

$$y(t) = \text{res}\left(e^{st}\frac{1-3s}{s^3+4}, z_0\right) + \text{res}\left(e^{st}\frac{1-3s}{s^3+4}, z_1\right)$$

$$+ \text{res}\left(e^{st}\frac{1-3s}{s^3+4}, z_2\right) =$$

$$= \left.\frac{e^{st}(1-3s)}{3s^2}\right|_{s=z_0} + \left.\frac{e^{st}(1-3s)}{3s^2}\right|_{s=z_1} + \left.\frac{e^{st}(1-3s)}{3s^2}\right|_{s=z_2}$$

$\nexists \lim_{t\to+\infty} y(t)$; $\lim_{t\to+\infty} |y(t)| = +\infty$

E 3

(i) Individuare la regione di convergenza puntuale e la funzione limite $f(x,y)$ della successione di funzioni $f_n(x,y)$ definita da

$$f_n(x,y) = e^{(x^3-y)n}, \quad (x,y) \in R^2$$

Dire se la convergenza è uniforme in tale regione e, in caso contrario, individuare almeno un sottoinsieme di convergenza uniforme.

(ii) Dire cosa accade nel caso che la successione $f_n(x,y)$ sia definita da

$$f_n(x,y) = e^{i(x^3-y)n}, \quad (x,y) \in R^2$$

i) Insieme di convergenza puntuale

$A = \{(x,y) \in R^2 : x^3 \leq y\}$

Funzione limite

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x^3 < y \\ 1 & \text{se } x^3 = y \end{cases}$$

Non c'è convergenza uniforme in tutto A, ma c'è in ogni sottoinsieme

$B_\alpha = \{(x,y) \in R^2 : y > x^3 + \alpha\}$ $\alpha > 0$ arbitrario

ii) Si ha che $|e^{i(x^3-y)}| = 1$ $\forall (x,y) \in R^2$

e $e^{i(x^3-y)} = 1$ quando $x^3 - y = 2k\pi$ $k \in Z$

(traslazioni, al variare di k della curva $y = x^3$)

Quindi in questo caso $A = \{(x,y) \in R^2 : x^3 - y = 2k\pi, k \in Z\}$

e $f(x,y) \equiv 1$

D 1

(i) Provare in campo reale che le serie di potenze sono sempre integrabili e derivabili termine a termine nel loro intervallo di convergenza.

(ii) Calcolare

$$\int_0^1 arctang(\sqrt{x})dx$$

con un errore inferiore a 5^{-2}.

$$\int_0^1 arctang(\sqrt{x})\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \int_0^1 x^{\frac{2n+1}{2}} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{2}{2n+3}$$

(si è usato il punto i).

Poiché la serie è di Leibnitz, vale la stima del resto n-mo:

$$|R_n| \leq \frac{2}{(2n+3)(2n+5)}$$

Per $n=2$ si ha $|R_2| \leq \frac{2}{7 \cdot 9} < \frac{1}{25}$

Dunque

$$\int_0^1 arctang(\sqrt{x})\,dx \simeq 2\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{15} + \frac{1}{35}\right)$$

Nome e Cognome ______________________________ matricola ________________ 1.5

D2 Dare la definizione di convergenza per una serie bilatera e provare che la somma di una serie di bilatera è una funzione analitica in una corona circolare.

Facoltativo: dare un esempio di serie bilatera convergente nella corona circolare $\frac{1}{2} < |z| < 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$