Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2015-2016
Soluzioni appello di Metodi Matematici per l'Ingegneria del 18 marzo 2016

Esercizio 1. Calcolare, usando il teorema dei residui, il seguente integrale di variabile complessa

$$\int_\gamma \frac{\cos z}{(z-5)(z^3-i)}\,dz$$

dove la curva chiusa $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ con

$$\gamma_1(t) = 4e^{it},\ t \in [0,\pi],$$
$$\gamma_2(t) = 8t-4,\ 0 \le t \le 1.$$

Soluzione:

La funzione $f(z) = \frac{\cos z}{(z-5)(z^3-i)}$ presenta le singolarità $z_0 = 5$, $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_2 = -i$, $z_3 = e^{i\frac{5}{6}\pi} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$ (zeri del denominatore).
Le singolarità che cadono all'interno di γ sono z_1 e z_3.
Utilizzando il teorema dei residui si trova che

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\Big(res(f(z),z_1) + res(f(z),z_3)\Big).$$

Si ha che

$$res(f(z),z_1) = \frac{\cos z_1}{4z_1^3 - i - 15z_1^2} = 2\frac{\cos e^{i\frac{\pi}{6}}}{i(6-15\sqrt{3})-15};$$

$$res(f(z),z_3) = \frac{\cos z_3}{4z_3^3 - i - 15z_3^2} = \frac{2\cos e^{i\frac{5}{6}\pi}}{i(6+15\sqrt{3})-15}.$$

(Per il calcolo del residuo abbiamo utilizzato la formula $res(f(z),z_k) = \frac{f_1(z_k)}{f_2'(z_k)}$, con $f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$, z_k zeri del denominatore e tali che $f_1(z_k) \neq 0$.) Ne segue che

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(2\frac{\cos e^{i\frac{\pi}{6}}}{i(6-15\sqrt{3})-15} + \frac{2\cos e^{i\frac{5}{6}\pi}}{i(6+15\sqrt{3})-15}\right).$$

Esercizio 2.
(i)Dire, motivando la risposta, in quale insieme del piano complesso è definita e in quale insieme è olomorfa la seguente funzione:

$$f(z) = Log\Big(1-\frac{3}{z}\Big) + \frac{1}{10-z}, \quad z \in C.$$

(ii) Trovare le due regioni del piano complesso in cui la funzione $f(z)$ è sviluppabile in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$. Scrivere lo sviluppo di $f(z)$ in una delle due regioni a scelta.

Soluzione:

(i) Insieme di definizione: $\mathbb{C} \setminus \{0,3,10\}$.
Insieme di olomorfia: $\mathbb{C} \setminus \{z = x+iy : x^2+y^2-3x \le 0, y = 0, z = 10\}$.
(ii) La serie è sviluppabile nelle regioni $\{|z| > 10\}$ e $\{3 < |z| < 10\}$. Ad esempio nella regione $\{3 < |z| < 10\}$ la funzione presenta il seguente sviluppo centrato in $z_0 = 0$:

$$f(z) = \sum_{n\ge0} \frac{3^{n+1}}{(n+1)z^{n+1}} + \frac{1}{10}\sum_{n\ge0}\left(\frac{z}{10}\right)^n.$$

Esercizio 3.
Data la successione di variabile complessa $(f_n(z))_{n\in N}$, definita da

$$f_n(z) = \frac{1}{e^{nz}},\ z \in C$$

(i) trovare l'insieme di definizione I, l'insieme di convergenza puntuale A e la funzione limite $f(z)$;

(ii) dire se la convergenza è uniforme in A; se non lo è, trovare almeno un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione:

L'insieme di definizione è $\mathbb{C}$.
Posto $e^z = t$ la successione $f_n(t) = \frac{1}{t^n}$ è tale che

$$\lim_{n\to} f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| > 1 \\ 1 & \text{se } t = 1 \end{cases}.$$

L'insieme di convergenza puntuale è dunque $A = \{z \in C : Re(z) > 0\} \cup \{z \in C : z = 2k\pi i, k \in Z\}$ (si ricordi che $|e^z| = e^{Re(z)}$, pertanto $|e^z| > 1$ è equivalente a $Re(z) > 0$).
La successione di funzioni $f_n(t)$ non converge uniformemente in A, in quanto la funzione limite è discontinua. Tuttavia converge uniformemente in ogni semipiano del tipo $B = \{z \in C : Re(z) \geq a > 0\}$ con $a > 0$, in quanto:

$$\sup_B \left| \frac{1}{e^{nz}} \right| = \sup_B \frac{1}{e^{nRe(z)}} = \frac{1}{e^{na}} \to 0, \quad \text{per } n \to +\infty.$$

Esercizio 4 (D1)**.**

(i) Scrivere la formula per la trasformata di Laplace dell'integrale $\int_0^t y(\tau)d\tau$ di un segnale $y(t)$.

(ii) Risovere, usando la trasformata di Laplace, il seguente problema :

$$\begin{cases} y''(t) = \int_0^t y(\tau)d\tau & t \geq 0 \\ y(0) = 1 \\ \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione

(i) Poiché vale che

$$\int_0^t y(\tau)d\tau = y(t) * H(t),$$

dove $y(t) * H(t)$ denota il prodotto di convoluzione tra $y(t)$ e la funzione di Heaviside $H(t)$, si ha, applicando la trasformata di Laplace alla relazione precedente e ricordando che la trasformata di un prodotto di convoluzione tra due funzioni è uguale al prodotto delle trasformate delle funzioni:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t y(\tau)d(\tau)\right] = \frac{\mathcal{L}[y](s)}{s}.$$

(ii) Posto $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ si trova che

$$s^2Y(s) - s - 1 = \frac{Y(s)}{s}$$

da cui

$$Y(s) = \frac{(s+1)s}{s^3-1}.$$

Utilizzando i residui per calcolare il segnale si trova che

$$y(t) = \sum_{j=1}^{3} res\left(\frac{e^{st}(s+1)s}{s^3-1}, s_j\right),$$

dove s_j, $j = 1,2,3$ sono le singolarità (poli semplici) di $Y(s)$ (si tratta delle radici cubiche dell'unità) date da $s_1 = 1, s_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, s_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Calcolando i residui si trova che

$$res(Y(s)e^{st}, s_1) = \frac{2e^t}{3},$$

$$res(Y(s)e^{st}, s_2) = \frac{2e^{t(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{3i\sqrt{3}+3},$$

$$res(Y(s)e^{st}, s_3) = \frac{2e^{t(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{3-3i\sqrt{3}}.$$

In definitiva il segnale cercato è

$$y(t) = \frac{2e^t}{3} + \frac{2e^{t(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{3i\sqrt{3}+3} + \frac{2e^{t(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})}}{3-3i\sqrt{3}}.$$

Esercizio 5 (D2)**.**

(i)Definizione di zero di una funzione analitica $f(z)$ e di ordine di uno zero.

(ii) Provare il teorema degli zeri isolati per funzioni analitiche.Facoltativo: calcolare, motivando, l'ordine dello zero $z_0 = 2\pi i$ della funzione $f(z) = \frac{(e^z-1)^8}{(z-2\pi i)^5}$.

Soluzione

Ricordando che la funzione esponenziale è periodica di periodo $2\pi i$, si ha che

$$(e^z - 1)^8 = (e^{z-2\pi i} - 1)^8.$$

Inoltre osserviamo che

$$(e^{z-2\pi i} - 1)^8 \quad \sim \quad (z - 2\pi i)^8 \quad \text{per } z \to 2\pi i.$$

Il punto $z_0 = 2\pi i$ è uno zero del terzo ordine per $f(z) = \frac{(e^z-1)^8}{(z-2\pi i)^5}$ in quanto

$$f(z) = \frac{(e^z - 1)^8}{(z - 2\pi i)^5} \quad \sim \quad \frac{(z - 2\pi i)^8}{(z - 2\pi i)^5} = (z - 2\pi i)^3 \text{ per } z \to 2\pi i.$$