METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 18 marzo 2022

Nome e Cognome ____ **matricola** __________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1

Data la successione di funzioni di una variabile reale $(f_n(x))_{n\geq 1}$, definita per $x \in R$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} n^3 \quad se \quad |x| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{|x|^n} \qquad altrove \end{cases}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x)$.

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

(iii) Dire cosa cambia se si considera la successione di funzioni $(f_n(z))_{n\geq 1}$ della variabile complessa $z \in C$

$$f_n(z) = \begin{cases} n^3 \quad se \quad |z| \leq \frac{1}{n} \\ \frac{1}{z^n} \qquad altrove \end{cases}$$

Soluzione:

$A = \{x \in R : |x| \geq 1\}$ e

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad se \quad |x| > 1 \\ 1 \quad se \quad |x| = 1 \end{cases}$$

Non c'è convergenza uniforme in tutto A perchè per ogni $n \geq 1$

$$g_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)| = \sup_{\{|x|>1\}} \frac{1}{|x|^n} = 1.$$

Si ha invece convergenza uniforme in ogni $B_\alpha = \{x \in R : |x| \geq \alpha > 1\}$ perchè per ogni $n \geq 1$

$$g_n = \sup_{B_\alpha} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{B_\alpha} \frac{1}{|x|^n} = \frac{1}{\alpha^n}$$

e dunque in questo caso $\lim_{n\to+\infty} g_n = 0$.

Nel caso della successione $(f_n(z))_{n\geq 1}$, l'insieme A di convergenza puntuale cambia ed è

$$A = \{z \in C : |z| > 1\} \cup \{z = 1\}.$$

Il resto rimane uguale.

E 2

Trovare l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione

$$f(z) = Log\big(1 + \frac{16}{z^2}\big) + \frac{1}{z-8}.$$

Individuare le due regioni del piano complesso in cui essa è sviluppabile in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$.

Soluzione:

Insieme di definizione $C - \{0, 8, \pm 4i\}$.

Aperto di olomorfia $C - \{\{z = x + iy : x = 0,\ |y| \leq 4\} \cup \{z = 8\}\}$.

(basta trovare i punti che rendono $1+\frac{16}{z^2}$ reale negativo o nullo ed escluderli dall'insieme di definizione)

Le due regioni in cui la funzione è sviluppabile in serie di Laurent di centro $z_0 = 0$ sono le due corone circolari aperte $C_1 = \{z \in C : 4 < |z| < 8\}$ e $C_2 = \{z \in C : |z| > 8\}$.

(sono le uniche due corone circolari di centro $z_0 = 0$ in cui la funzione è analitica).

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

1) Scrivere la formula della trasformata di Laplace di un segnale ritardato e darne un cenno di dimostrazione.

Calcolare l'ascissa di convergenza e la trasformata di Laplace del seguente segnale

$$f(t) = cos\, t\, H(t) - cos\,(t - \pi)H(t - \pi)$$

a) $\sigma[f] = -\infty$, $L[f(t)] = \frac{s(1-e^{-s\pi})}{s^2+1}$

b) $\sigma[f] = 0$, $L[f(t)] = \frac{s}{s^2+1} - \frac{e^{-s\pi}}{s^2+1}$

c) $\sigma[f] = \pi$, $L[f(t)] = \frac{s(1-e^{-s\pi})}{s^2+1}$

Soluzione: b)

2) Dire per quali valori del parametro $h \in N - \{0\}$ la seguente funzione ammette primitiva in C^*

$$\frac{z^4 + isen\, z}{z^h} dz$$

a) $h \in N - \{0\}$

b) $h \notin \{2, 4, 5, 6, 8, 10, ...\}$

c) $h \neq 5$

Soluzione: b)

3) Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^{z^3} - 1}{(e^z - 1)^3}$$

trovare i suoi punti singolari e dire di che tipo di singolarità si tratta:

a) $z = 2k\pi i \quad k \in Z$; singolarità eliminabile se $k = 0$, polo di ordine 3 se $k \neq 0$

b) $z = 0$, polo di ordine 3

c) $z = 2k\pi i \quad k \in Z$; polo di ordine 3 se $k = 0$, singolarità eliminabile se $k \neq 0$

Soluzione: a)