Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello del 19 settembre 2014

Esercizio 1. Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale $y(t)$ che risolve

$$\begin{cases} y''(t) - 2y'(t) = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = a \end{cases}$$

con $a \in R$.

Determinare poi a in modo che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$.

Soluzione:

Usando la sostituzione $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ si ottiene:

$$Y(s) = \frac{as+1}{s^2(s-2)},$$

da cui ricaviamo che

$$y(t) = res\left(\frac{e^{st}(as+1)}{s^2(s-2)}, 0\right) + res\left(\frac{e^{st}(as+1)}{s^2(s-2)}, 2\right)$$

dove $s = 0$ e $s = 2$ sono poli rispettivamente doppio e semplice per $Y(s)$. Ne segue che:

$$y(t) = \frac{e^{2t}(2a+1)}{4} - \frac{2t+2a+1}{4}.$$

Affinché risulti

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = -\infty$$

deve essere $a < -\frac{1}{2}$.

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z^2+16}$$

dove γ é il rettangolo di vertici -2, 2 , $-2-5i$, $2-5i$.

Soluzione:

La funzione integranda presenta due singolaritá nei punti $z_1 = 4i$ e $z_2 = -4i$ (poli semplici), delle quali soltanto z_2 é interna a γ. Pertanto, per il teorema dei residui si ha:

$$\int_\gamma \frac{z^2}{z^2+16} = 2\pi i \; res\left(\frac{z^2}{z^2+16}, -4i\right) = 4\pi.$$

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2(1-z)},$$

(i) individuare i suoi punti singolari, classificarli e calcolarne il residuo

(ii) scrivere i primi tre termini del suo sviluppo di Laurent di centro $z_0 = 0$ in un intorno forato di tale punto.

Soluzione:

(i) I punti singolari di $f(z)$ sono $z_1 = 0$ e $z_1 = 1$ e risultano essere entrambi poli semplici.

I residui in tali punti sono dati da:

$$res(f(z), 0) = 1, \quad res(f(z), 1) = 1 - e.$$

(ii) Utilizzando gli sviluppi in serie noti per la funzione e^z e per $\frac{1}{1-z}$ e svolgendo facili calcoli algebrici risulta che:

$$c_{-1} = 1, \quad c_0 = \frac{3}{2}, \quad c_1 = \frac{5}{3},$$

pertanto i primi tre termini dello sviluppo di $f(z)$ sono dati da:

$$\frac{1}{z} + \frac{3}{2} + \frac{5}{3}z.$$

Esercizio 4 (D1)**.**

(i)Convergenza puntuale delle serie di Fourier: enunciare il teorema.

(ii) Data $f(x)$, periodica di periodo 2π e definita in $(0, 2\pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x < \pi \\ -10 & \pi < x < 2\pi \\ 3 & x = 0,\ x = \pi \end{cases}$$

calcolare la somma della sua serie di Fourier per $x = 5\pi$ e i coefficienti a_3 e b_3.

Soluzione:

(ii) Essendo $f(x)$ periodica e regolare a tratti in R, la somma della serie di Fourier di f é data da

$$S(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

da cui si ricava che

$$S(5\pi) = S(\pi) = \frac{-10+5}{2} = -\frac{5}{2}.$$

I coefficienti a_3 e b_3 sono dati rispettivamente da:

$$a_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(3x)dx = 0,$$

$$b_3 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(3x)dx = -\frac{10}{3\pi}.$$

Esercizio 5 (D2)**.**

(i) Lo sviluppo in serie di potenze, sia in campo reale che in campo complesso é unico: perché?

(ii) Calcolare $f^{(51)}(0)$ dove

$$f(z) = z^2 Log(1+2z)$$

Soluzione:

(ii) Utilizzando lo sviluppo noto per la funzione $Log(1+z)$, si ha che:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n 2^{n+1} z^{n+3}}{(n+1)},$$

da cui ricordando la relazione tra coefficienti dello sviluppo in serie e derivate della funzione

$$f^n(0) = a_n \cdot n!$$

si ottiene che

$$f^{51}(0) = a_{51} \cdot (51)! = \frac{2^{49}(51)!}{49}.$$