Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello del 19 settembre 2014

Esercizio 1. Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale $y(t)$ che risolve

$$\begin{cases} y''(t) + 3y'(t) = 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = b \end{cases}$$

con $b \in R$.

Determinare poi b in modo che $\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$.

Soluzione:
Usando la sostituzione $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$ si ottiene:

$$Y(s) = \frac{bs+1}{s^2(s+3)},$$

da cui ricaviamo che

$$y(t) = res\left(\frac{e^{st}(bs+1)}{s^2(s+3)}, 0\right) + res\left(\frac{e^{st}(bs+1)}{s^2(s+3)}, -3\right)$$

dove $s = 0$ e $s = -3$ sono poli rispettivamente doppio e semplice per $Y(s)$. Ne segue che:

$$y(t) = \frac{3t + 3b - 1}{9} + \frac{e^{-3t}(-3b+1)}{9}.$$

Risulta che

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = +\infty$$

per ogni $b \in \mathbb{R}$.

Esercizio 2. Calcolare

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+25}$$

dove γ é il rettangolo di vertici -1, 1 , $1+6i$, $-1+6i$.

Soluzione:

La funzione integranda presenta due singolaritá nei punti $z_1 = 5i$ e $z_2 = -5i$ (poli semplici), delle quali soltanto z_1 é interna a γ. Pertanto, per il teorema dei residui si ha:

$$\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2+25} = 2\pi i \; res\left(\frac{e^{iz}}{z^2+25}, 5i\right) = \frac{\pi e^{-5}}{5}.$$

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(z) = \frac{\cos z - 1}{z^3(1-z)},$$

(i) individuare i suoi punti singolari, classificarli e calcolarne il residuo

(ii) scrivere i primi tre termini del suo sviluppo di Laurent di centro $z_0 = 0$ in un intorno forato di tale punto.

Soluzione:

(i) I punti singolari di $f(z)$ sono $z_1 = 0$ e $z_1 = 1$ e risultano essere entrambi poli semplici.

I residui in tali punti sono dati da:

$$res(f(z), 0) = -\frac{1}{2}, \quad res(f(z), 1) = 1 - cos 1.$$

(ii) Utilizzando gli sviluppi in serie noti per la funzione $\cos z$ e per $\frac{1}{1-z}$ e svolgendo facili calcoli algebrici risulta che:

$$c_{-1} = c_0 = -\frac{1}{2}, \quad c_1 = -\frac{11}{24},$$

pertanto i primi tre termini dello sviluppo di $f(z)$ sono dati da:

$$-\frac{1}{2z} - \frac{1}{2} - \frac{11}{24}z.$$

Esercizio 4 (D1)**.**

(i)Convergenza puntuale delle serie di Fourier: enunciare il teorema.

(ii) Data $f(x)$, periodica di periodo 2π e definita in $(0, 2\pi)$ da

$$f(x) = \begin{cases} 6 & 0 < x < \pi \\ 7 & \pi < x < 2\pi \\ 2 & x = 0,\ x = \pi \end{cases}$$

calcolare la somma della sua serie di Fourier nel punto $x = 3\pi$ ed il coefficiente a_5.

Soluzione:

(ii) Essendo $f(x)$ periodica e regolare a tratti in R, la somma della serie di Fourier di f é data da

$$S(x) = \frac{f(x_+) + f(x_-)}{2}$$

da cui si ricava che

$$S(3\pi) = S(\pi) = \frac{7+6}{2} = \frac{13}{2}.$$

Il coefficiente a_5 é dato da:

$$a_5 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(5x)dx = 0.$$

Esercizio 5 (D2)**.**

(i) Provare che se in un intorno del punto z_0 si ha

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

allora necessariamente si ha

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Calcolare $f^{(31)}(0)$ dove

$$f(z) = z^2 \cosh z$$

Soluzione:

(ii) Utilizzando lo sviluppo noto per la funzione $\cosh z$, si ha che:

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} \frac{z^{2n+2}}{(2n)!},$$

da cui ricordando la relazione tra coefficienti dello sviluppo in serie e derivate della funzione

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n!$$

si ottiene che

$$f^{(31)}(0) = 0.$$

Si noti che tutte le derivate di ordine dispari sono nulle in 0 in quanto nello sviluppo figurano solo potenze pari e dunque i coefficienti con indice dispari sono tutti nulli.