ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 20 settembre 2013

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Data la funzione

$$f(z) = \sum_{n=-10}^{7} \frac{1}{(z-2)^n} |n-3|^{n+2}$$

(i) Trovarne i punti singolari, classificarli e calcolarne il residuo.

(ii) Calcolare

$$\int_\gamma f(z)dz$$

dove γ é la curva bordo dell'insieme $T = \{z \in C : 0 \leq Re(z) \leq 3, \quad -1 \leq Im(z) \leq 1\}$.

R: (i) unico punto singolare $z = 2$, polo di ordine 7; $res(f(z), 2) = 8$. Si noti infatti che la funzione si puó riguardare come somma di una serie di Laurent che presenta un numero finito di termini non nulli e il coefficiente c_{-1} del termine $\frac{1}{z-2}$ é 8.

(ii) L'unico punto singolare cade entro la curva γ. Applicando il teorema dei residui, si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = 16\pi i$$

E 2 Usare la trasformata di Laplace per trovare la soluzione $y(t)$ del seguente problema

$$\begin{cases} y''(t) - 2\int_0^t y(\tau)d\tau = H(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

.

R: Ricordando che $L[\int_0^t y(\tau)d\tau](s) = \frac{1}{s}L[y(t)](s)$ e ponendo $L[y(t)](s) = Y(s)$, si ha

$$s^2Y(s) - 2\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

da cui

$$Y(s) = \frac{1}{s^3 - 2}.$$

I punti singolari di $Y(s)$ sono le tre radici cubiche di 2: $2^{\frac{1}{3}}$, $2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{2}{3}\pi}$, $2^{\frac{1}{3}}e^{i\frac{4}{3}\pi}$. Da cui, usando la formula di inversione,

$$y(t) = \frac{e^{2^{\frac{1}{3}}t}}{3\ 2^{\frac{2}{3}}} - \frac{e^{2^{-\frac{2}{3}}(-1+i\sqrt{3})t}}{3\ 2^{-\frac{1}{3}}(1+i\sqrt{3})} + \frac{e^{2^{-\frac{2}{3}}(-1-i\sqrt{3})t}}{3\ 2^{-\frac{1}{3}}(-1+i\sqrt{3})}$$

E 3 Data la funzione $f(t)$, periodica di periodo 5 e definita nell'intervallo $[0,5)$ come

$$f(t) = \begin{cases} |t-1|^{\alpha} \quad se \quad t \neq 1 \\ \\ 0 \quad se \quad t = 1 \end{cases},$$

(i) dire per quali valori del parametro reale α essa é continua a tratti, per quali é regolare a tratti e per quali é sommabile in $[0,5)$

(ii) per i valori di α per cui é regolare a tratti, calcolare la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier nei punti $t = 10$ and $t = 3$.

R: (i) continua a tratti se $\alpha \geq 0$, regolare a tratti se $\alpha \geq 1$ o $\alpha = 0$, sommabile se $\alpha > -1$.
(ii) $S(10) = S(0) = \frac{f(0_+)+f(0_-)}{2} = \frac{1+4^{\alpha}}{2}$, $S(3) = f(3) = 2^{\alpha}$.

D 1

(i) Dare la definizione di funzione olomorfa in un aperto A del piano complesso ed enunciare la condizione necessaria e sufficiente per l'olomorfia di una funzione in un aperto A.

(ii) Provare che la funzione $f(z) = e^{|z|}$ non é olomorfa in alcun aperto del piano complesso.

R: (ii) la funzione é non costante e a valori puramente reali, dunque non puó soddisfare le condizioni di Cauchy-Riemann.

D 2 Enunciare e dimostrare il teorema di integrazione e derivazione termine a termine per serie di potenze in campo reale .