ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 20 settembre 2013

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Data la funzione

$$f(z) = \sum_{n=-3}^{9} (z-4)^n \frac{1}{|n-10|^{n+2}}$$

(i) Trovarne i punti singolari, classificarli e calcolarne il residuo.

(ii) Calcolare

$$\int_\gamma f(z)dz$$

dove γ é la curva bordo dell'insieme $T = \{z \in C : 0 \leq Re(z) \leq 5, \quad -2 \leq Im(z) \leq 2\}$.

R: (i) unico punto singolare $z = 4$, polo di ordine 3; $res(f(z), 2) = \frac{1}{11}$. Si noti infatti che la funzione si puó riguardare come somma di una serie di Laurent che presenta un numero finito di termini non nulli e il coefficiente c_{-1} del termine $\frac{1}{z-2}$ é $\frac{1}{11}$.

(ii) L'unico punto singolare cade entro la curva γ. Applicando il teorema dei residui, si ha

$$\int_\gamma f(z)dz = \frac{2\pi i}{11}$$

E 2 Usare la trasformata di Laplace per trovare la soluzione $y(t)$ del seguente problema

$$\begin{cases} y''(t) + \displaystyle\int_0^t y(\tau)d\tau = H(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

.

R: Ricordando che $L[\int_0^t y(\tau)d\tau](s) = \frac{1}{s}L[y(t)](s)$ e ponendo $L[y(t)](s) = Y(s)$, si ha

$$s^2Y(s) + \frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{s}$$

da cui

$$Y(s) = \frac{1}{s^3+1}.$$

I punti singolari di $Y(s)$ sono le tre radici cubiche di -1: -1, $e^{i\frac{\pi}{3}\pi}$, $e^{i\frac{5}{3}\pi}$. Da cui, usando la formula di inversione,

$$y(t) = \frac{e^{-t}}{3} - \frac{2e^{(1-i\sqrt{3})\frac{t}{2}}}{3(1+i\sqrt{3})} + \frac{2e^{(1+i\sqrt{3})\frac{t}{2}}}{3(-1+i\sqrt{3})}$$

E 3 Data la funzione $f(t)$, periodica di periodo 2π e definita nell'intervallo $[0, 2\pi)$ come

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{|t-1|^\alpha} & se \quad t \neq 1 \\ \\ 0 \quad se \quad t = 1 \end{cases},$$

(i) dire per quali valori del parametro reale α essa é continua a tratti , per quali é regolare a tratti e per quali é sommabile in $[0, 2\pi)$

(ii) per i valori di α per cui é regolare a tratti, calcolare la somma $S(t)$ della sua serie di Fourier nei punti $t = 8\pi$ and $t = 4$.

R: (i) continua a tratti se $\alpha \leq 0$, regolare a tratti se $\alpha \leq -1$ o $\alpha = 0$, sommabile se $\alpha < 1$.
(ii) $S(8\pi) = S(0) = \frac{f(0_+)+f(0_-)}{2} = (1 + \frac{1}{(2\pi-1)^\alpha})\frac{1}{2}$, $S(4) = f(4) = \frac{1}{3^\alpha}$.

D 1

(i) Provare, usando le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari ($\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho i}\frac{\partial f}{\partial \theta}$), che la funzione $f(z) = Logz$ é olomorfa in C^{**}.

(ii) Provare che la stessa funzione non é derivabile in senso complesso nei punti del semiasse reale negativo.

R: (i) Sia $z = \rho e^{i\theta}$, $\theta = Argz$. Allora $Logz = log\rho + i\theta$ e dunque le condizioni di Cauchy-Riemann in coordinate polari sono soddisfatte in C^{**}.

(ii) La funzione $Logz$ non puó essere derivabile in senso complesso nei punti del semiasse reale negativo perché non é nemmeno continua in quei punti, a causa della funzione $Argz$ che é discontinua nei punti del semiasse reale negativo.

D 2 Enunciare e dimostrare il teorema di integrazione e derivazione termine a termine per serie di potenze in campo reale .