ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 21 gennaio 2013

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare, usando i metodi della variabile complessa,

$$\int_\gamma \frac{1}{e^{2z} - i}\, dz$$

dove γ é la curva bordo dell'insieme $S = \{z \in C : \quad -1 \leq Re(z) \leq 1, \quad 0 \leq Im(z) \leq 5.\}$

R: 2π

(Si applica il teorema dei residui. I punti singolari della funzione sono $z = i(\frac{\pi}{4} + k\pi), \quad k \in Z$, poli semplici per $f(z)$, in quanto zeri del primo ordine per il denominatore. Cadono entro γ i punti $z_0 = i\frac{\pi}{4}$ e $z_1 = i\frac{5\pi}{4}$.Per entrambi il residuo é pari a $\frac{1}{2i}$.)

E 2

(i) Trovare l'ascissa di convergenza del seguente segnale

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 3 \\ e^{(i+1)t} & \text{se} \quad t > 3 \end{cases}$$

(ii) Calcolarne la trasformata di Laplace.

R:

(i) $\sigma[f] = 1$

(Infatti i numeri complessi s per cui $\int_3^{+\infty} |e^{(-s+i+1)t}| dt = \int_3^{+\infty} |e^{(-Re(s)+1)t}| dt < +\infty$ sono quelli per cui $Re(s) > 1$)

(ii) $L[f(t)](s) = -\int_0^3 e^{-st} dt + \int_3^{+\infty} e^{(-s+i+1)t} dt = \dfrac{e^{-3s} - 1}{s} - \dfrac{e^{(i+1-s)3}}{i+1-s}$

E 3 Individuare l' insieme di definizione, di convergenza puntuale, di convergenza totale e la somma $S(z)$, della seguente serie di funzioni in campo complesso

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{n}{z}}, \qquad z \in C.$$

R: L'insieme di definizione é C^*. Si ha convergenza assoluta e dunque puntuale nel semipiano $S = \{z \in C : Re(z) < 0\}$, si ha convergenza totale nei semipiani $S_\alpha = \{z \in C : Re(z) \leq \alpha < 0\}$. La somma della serie é $S(z) = \frac{1}{1-e^{1/z}}$

(Si pone $e^{\frac{1}{z}} = t$ e si ottiene la serie geometrica di ragione t in campo complesso. Si osservi che $|e^{\frac{1}{z}}| = e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$.)

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ____________________ 1.4

D 1

(i) Serie di Laurent : definizione, convergenza, forma dei coefficienti dello sviluppo in serie di Laurent di una funzione $f(z)$.

(ii) Provare che, se una funzione $f(z)$ ha in z_0 una singolaritá eliminabile, il suo sviluppo in serie di Laurent di centro z_0 ha tutti i coefficienti della parte singolare nulli.

D 2

(i) Dare la definizione di funzione regolare a tratti in R.

(ii) Dire per quali valori del parametro $\alpha \in R$ funzione $f(t)$, periodica di periodo π, definita in $[0, \pi[$ nel modo seguente, é regolare a tratti in R:

$$f(t) = \begin{cases} |sent|^{\alpha} & \text{se} \quad 0 < t < \pi \\ \\ 1 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

Calcolare, per quei valori, la somma S(t) della sua serie di Fourier nei punti $t = 5\pi$ e $t = \frac{25}{4}\pi$.

R:

(i) $\alpha = 0$ e $\alpha \geq 1$.

(ii) Se $\alpha = 0$ si ha $S(t) = 1$, $\forall t \in R$. Se $\alpha \geq 1$ si ha $S(5\pi) = S(\pi) = 0$ e $S(\frac{25\pi}{4}) = S(\frac{\pi}{4}) = f(\frac{\pi}{4}) = (\frac{\sqrt{2}}{2})^{\alpha}$