ANALISI MATEMATICA II
Laurea in Ingegneria Informatica
METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea magistrale in Ingegneria Meccanica
ANALISI MATEMATICA III
Laurea magistrale in Ingegneria dell'Ambiente e Territorio

Esame del 21 gennaio 2013

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare, usando i metodi della variabile complessa,

$$\int_\gamma \frac{1}{e^{iz}+2}\,dz$$

dove γ é la curva bordo dell'insieme $S = \{z \in C : \quad -4 \leq Re(z) \leq 4, \quad -1 \leq Im(z) \leq 2.\}$

R: -2π

(Si applica il teorema dei residui. I punti singolari della funzione sono $z = -ilog2+\pi(1+2k), \quad k \in Z$, poli semplici per $f(z)$, in quanto zeri del primo ordine per il denominatore. Cadono entro γ i punti $z_0 = -ilog2 + \pi$ e $z_1 = -ilog2 - \pi$.Per entrambi il residuo é pari a $-\frac{1}{2i}$.)

E 2

(i) Trovare l'ascissa di convergenza del seguente segnale

$$f(t) = \begin{cases} e^{(i+1)t} & \text{se} \quad 0 \le t \le 2 \\ \\ e^{t} & \text{se} \quad t > 2 \end{cases}$$

(ii) Calcolarne la trasformata di Laplace.

R:

(i) $\sigma[f] = 1$

(Infatti i numeri complessi s per cui $\displaystyle\int_2^{+\infty} |e^{(-s+1)t}| dt = \int_2^{+\infty} |e^{(-Re(s)+1)t}| dt < +\infty$ sono quelli per cui $Re(s) > 1$)

(ii) $\displaystyle L[f(t)](s) = \int_0^2 e^{(-s+i+1)t} dt + \int_2^{+\infty} e^{(-s+1)t} dt = \frac{e^{(1+i-s)2} - 1}{1+i-s} + \frac{e^{(1-s)2}}{s-1}.$

E 3 Individuare l' insieme di definizione, di convergenza puntuale, di convergenza totale e la somma $S(z)$, della seguente serie di funzioni in campo complesso

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n}{z}}, \qquad z \in C.$$

R: L'insieme di definizione é C^*. Si ha convergenza assoluta e dunque puntuale nel semipiano $S = \{z \in C : Re(z) > 0\}$, si ha convergenza totale nei semipiani $S_\alpha = \{z \in C : Re(z) \geq \alpha > 0\}$. La somma della serie é $S(z) = \frac{1}{1-e^{-1/z}}$

(Si pone $e^{-\frac{1}{z}} = t$ e si ottiene la serie geometrica di ragione t in campo complesso. Si osservi che $|e^{-\frac{1}{z}}| = e^{-\frac{x}{x^2+y^2}}$.)

Nome e Cognome ________________________________ **matricola** ________________ 2.4

D 1

(i) Serie di Laurent: definizione, convergenza, analiticitá della somma nella corona circolare in cui la serie converge.

(ii) Provare che, se una funzione $f(z)$ ha in z_0 una singolaritá essenziale, il suo sviluppo in serie di Laurent di centro z_0 ha parte singolare con infiniti coefficienti diversi da zero.

Nome e Cognome ____ **matricola** ____________________ 2.5

D 2

(i) Dire per quali valori del parametro $\alpha \in R$ la funzione $f(t)$, periodica di periodo π, definita in $[0, \pi[$ nel modo seguente, é di quadrato sommabile in $[0, \pi]$:

$$f(t) = \begin{cases} (sent)^{\alpha} & \text{se} \quad 0 < t < \pi \\ \\ 1 \quad \text{se} \quad t = 0 \end{cases}$$

(ii) Calcolare, per $\alpha = 1/2$, la somma S della serie

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

dove a_k, b_k sono i coefficienti di Fourier di $f(t)$ (non é necessario calcolarli).

R:

(i) $\alpha > -\frac{1}{2}$

(ii) $\frac{2}{\pi}$ (Si deve usare l'eguaglianza di Parseval.)