METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 21 gennaio 2022

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Data la funzione

$$f(z) = \frac{sen\,(z^2)}{z^h} \quad h \in Z,$$

(definita in C^* se $h > 0$ e in C se $h \leq 0$), calcolare, al variare del parametro $h \in Z$, il seguente integrale

$$\int_\gamma f(z)dz$$

dove γ è definita da $\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$.

Risposta:

$$res(f(z), 0) = \begin{cases} (-1)^{\frac{h-3}{4}} \frac{1}{(\frac{h-3}{2}+1)!} & se \;\; h = 4n+3, \;\; n \geq 0 \\ 0 & se \;\; h \neq 4n+3, \;\; n \geq 0 \end{cases}$$

Dunque

$$\int_\gamma f(z)dz = \begin{cases} 2\pi i(-1)^{\frac{h-3}{4}} \frac{1}{(\frac{h-3}{2}+1)!} & se \;\; h = 4n+3, \;\; n \geq 0 \\ 0 & se \;\; h \neq 4n+3, \;\; n \geq 0 \end{cases}$$

E 2

Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{i + e^{iz}}$$

(i) Calcolare il residuo in tutti i punti singolari.
(ii) Trovare tutte le strisce

$$S = \{z = x + iy : a < x < b, \, y \in R\}$$

del piano complesso in cui tutti gli integrali della funzione lungo curve chiuse siano nulli.

Risposta:

(i) I punti singolari sono

$$z_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \;\; k \in Z,$$

tutti poli semplici con

$$res(f(z), z_k) = \frac{1}{ie^{iz_k}} = 1$$

(ii)

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < a < b < -\frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi$$

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando la risposta.

1) Data la seguente funzione periodica di periodo 8 e definita in $[-4,4)$ come

$$f(t) = \begin{cases} |t-2| & t \in (-4,2) \\ e^{t^2} & t \in (2,4) \\ \gamma & t = -4 \\ \beta & t = 2 \end{cases}$$

$\gamma, \beta \in R$, verificare che è regolare a tratti in R e dire come bisogna scegliere i valori γ, β affinchè la serie di Fourier di $f(t)$ converga puntualmente a $f(t)$ in tutto R.

a)$\gamma = \frac{e^{16}+6}{2}$ $\quad e \quad$ $\beta = \frac{e^4}{2}$
b)$\gamma = \frac{e^{-16}+6}{2}$ $\quad e \quad$ $\beta = \frac{1}{2}$
c)$\gamma = \frac{e^{16}+4}{2}$ $\quad e \quad$ $\beta = \frac{1}{2}$

Provare inoltre che la serie di Fourier di $f(t)$ non può convergere totalmente, ma converge in media quadratica (dare la definizione di convergenza in media quadratica)

Risposta: a), usare il teorema sulla convergenza puntuale della serie di Fourier di una funzione regolare a tratti in R.

Non ci può essere convergenza totale perche' la funzione $f(t)$ è discontinua e i termini della serie di Fourier sono tutti continui. Converge in media quadratica perchè $f(t)$ è di quadrato sommabile in $[-4,4]$ in quanto regolare a tratti.

2) Sia data la successione di funzioni di variabile reale, definita per $x \geq 0$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} n & se \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ sen\, x & \text{altrove.} \end{cases}$$

Calcolare l'ascissa di convergenza $\sigma[f_n]$, la trasformata di Laplace $L[f_n(x)](s)$ e il $\lim_{n\to+\infty} L[f_n(x)](s)$

a)$\sigma[f_n] = 0$, $\lim_{n\to+\infty} L[f_n(x](s) = 1 + \dfrac{1}{1+s^2}$
b) $\sigma[f_n] = -\infty$, $\lim_{n\to+\infty} L[f_n(x](s) = 1 - \dfrac{1}{1+s^2}$
c) $\sigma[f_n] = 0$, $\lim_{n\to+\infty} L[f_n(x](s) = \dfrac{1}{1+s^2}$

Risposta: a)

3) Trovare una funzione $f(z)$ olomorfa in C che abbia come parte reale la funzione $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$

a)$f(z) = \bar{z}^2 + z$
b)$f(z) = z^2 + 1$
c) $f(z) = z^2 + z$

Risposta: c), usare le condizioni di Cauchy-Riemann. Si ha $v(x,y) = 2xy + y$ e dunque $f(z) = z^2 + z$.