METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 21 giugno 2021

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

Esercizio 1

Sia data la successione di funzioni di variabile reale, definita per $x \geq 0$ e $\alpha \geq 0$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} -n^\alpha & se \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ & \\ e^x & altrove. \end{cases}$$

(i) Trovare, al variare di α, l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(x)$ e almeno un sottoinsieme di convergenza uniforme.

(ii) Calcolare, al variare di α, l'ascissa di convergenza e la trasformata di Laplace $L[f_n(x)](s)$ della funzione $f_n(x)$.

(iii) Calcolare il $\lim\limits_{n\to+\infty} L[f_n(x)](s)$ al variare di α.

Risposta:

(i) -Se $\alpha > 0$ si ha $A = (0, +\infty)$ e $f(x) = e^x$. Non si ha convergenza uniforme in A in quanto, per ogni n fissato, $g_n = \sup_A |f_n(x) - f(x)| = \sup_A(n^\alpha + e^x) = +\infty$ e dunque $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = +\infty$.

Si ha invece convergenza uniforme in ogni sottoinsieme di A della forma $B_\beta = [\beta, +\infty)$, $\beta > 0$ in quanto in tal caso $g_n = \sup_{B_\beta} |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad \forall n > \frac{1}{\beta}$ e dunque $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n = 0$.

-Se $\alpha = 0$ si ha $A = [0, +\infty)$ e $f(x) = \begin{cases} e^x & x \in (0, +\infty) \\ & \\ -1 & x = 0 \end{cases}$

Non si ha convergenza uniforme in A in quanto $f(x)$ è discontinua in A. Come nel caso $\alpha > 0$ la convergenza uniforme si ha in ogni sottoinsieme $B_\beta = [\beta, +\infty)$, $\beta > 0$ di A.

(ii) Per $\alpha \geq 0 \quad \sigma[f_n] = 1, \quad L[f_n(x](s) = n^\alpha \frac{e^{-\frac{s}{n}}-1}{s} + \frac{e^{\frac{1-s}{n}}}{s-1}$

(iii) Per ogni $s : Re(s) > 1$ si ha: $\lim\limits_{n\to+\infty} |L[f(x](s)| = +\infty$ se $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} L[f(x](s) = -1 + \dfrac{1}{s-1}$ se $\alpha = 1$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} L[f(x](s) = \dfrac{1}{s-1}$ se $\alpha < 1$.

Esercizio 2

1) Trovare l'insieme di definizione e l'aperto di olomorfia della funzione $f(z) = Log(1 + zi)$.

2) Data la curva γ definita da

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{2},$$

calcolare

$$\int_\gamma \frac{Log(1+zi)}{z^2}dz$$

3) Dire se la funzione integranda $\frac{Log(1+zi)}{z^2}$ ammette primitiva nel suo insieme di definizione.

4) Enunciare e dimostrare brevemente il risultato teorico che si è usato per il punto 3).

Risposta:

-Insieme di definizione di $f(z) = Log(1+zi)$: $C - \{i\}$.

-Insieme di olomorfia di $f(z) = Log(1+zi)$: $C - \{x+iy : x = 0,\ y \geq 1\}$

-$\int_\gamma \frac{Log(1+zi)}{z^2} = -2\pi$

(infatti, usando lo sviluppo di $Log(1+zi)$ di centro $z_0 = 0$ si vede che la funzione integranda ha un polo di ordine 1 in $z_0 = 0$ con residuo i)

-La funzione integranda non ammette primitiva nel suo insieme di definizione $C - \{i, 0\}$ perchè non tutti gli integrali lungo curve chiuse sono nulli.

Domande

Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

D1)

Dare la definizione di serie trigonometrica convergente puntualmente, totalmente e in media quadratica.

Dare un esempio di funzione periodica di periodo 2π la cui serie di Fourier converga puntualmente ma non totalmente e inoltre un esempio di funzione periodica di periodo 2π la cui serie di Fourier converga in media quadratica ma non puntualmente.

a)

$$f(t) = t^2 \quad t \in [-\pi, \pi)$$

$$f(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}} & t \in (0, 2\pi) \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

b)

$$f(t) = t^2 \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$f(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{4}} & t \in (0, 2\pi) \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

c)

$$f(t) = t^2 \quad t \in [0, 2\pi)$$

$$f(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}} & t \in (0, 2\pi) \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

D2)

Data $f(z)$ definita come

$$f(z) = \sum_{n=-10}^{+\infty} \frac{(z-3)^n}{4^{n+3}},$$

individuare l'insieme dove essa è analitica e dire se in tale insieme essa ammette primitiva.

a) $|z-3| > 4$ e ammette primitiva in tale insieme

b) $0 < |z-3| < 4$ e non ammette primitiva in tale insieme

c) $|z-3| < 4$ e ammette primitiva in tale insieme

D3)

Calcolare

$$\int_\gamma Arg(z-2)dz$$

dove $\gamma(t) = 2 + e^{it} \quad -\pi \leq t < \pi$

a) 0

b) -2π

c)2π

Risposte:

$b)$, $b)$, $b)$.