METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 22-01-2021

Nome e Cognome ________________________________ **matricola** ________________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Data la successione di funzioni di variabile complessa definita in $I = C - \{1\}$ come

$$f_n(z) = \left(\frac{z}{z-1}\right)^n, \quad n \in N \quad z \in C - \{1\}$$

(i) Trovare l'insieme di convergenza puntuale A della successione e la funzione limite $f(z)$

(ii) Dire se la successione converge uniformemente in A e, in caso contrario, trovare in A un sottoinsieme di convergenza uniforme.

Soluzione: La successione converge puntualmente alla funzione $f(z) \equiv 0$ nell'insieme $A = \{z \in C - \{1\} : \left|\frac{z}{z-1}\right| < 1\} = \{z = x + iy \in C - \{1\} : x < \frac{1}{2}\}$

In questo caso non esiste alcun punto $z \in C - \{1\}$ per cui $\frac{z}{z-1} = 1$.

La convergenza non è uniforme in A, perchè $g_n = \sup_A \left|\frac{z}{z-1}\right|^n = 1 \ \forall n \in N$. È uniforme in ogni sottoinsieme $B_\alpha = \{z \in C - \{1\} : \left|\frac{z}{z-1}\right| \leq \alpha < 1\}$ perch è $\sup_{B_\alpha} \left|\frac{z}{z-1}\right|^n = \alpha^n$ e $\lim_{n\to+\infty} \alpha^n = 0$.

E 2 Data la seguente funzione di variabile complessa:

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 2i}$$

individuare le tre regioni del piano complesso in cui essa è sviluppabile in serie di Laurent di centro $z_0 = 1$ e scrivere il suo sviluppo in serie di Laurent nell'unica regione che non è limitata. Calcolare poi $\int_{\gamma_r} f(z)dz$ dove γ_r é la circonferenza definita da $|z - (1 + i)| = r$ con $r < 2\sqrt{2}$ oppure $r > 2\sqrt{2}$.

Soluzione: Le tre regioni sono

$$|z - 1| < 1,$$

$$1 < |z - 1| < \sqrt{5},$$

$$|z - 1| > \sqrt{5}$$

(bisogna trovare le tre corone circolari di centro 1 in cui $f(z)$ è analitica e dunque bisogna calcolare le distanze di 1 da $(1 + i)$ e da $-(1 + i)$ che sono i due punti singolari della funzione, radici quadrate di $2i$). La terza regione è l'unica non limitata. In questa regione si ha

$$f(z) = A\frac{1}{(z-1)+i} + B\frac{1}{(z-1)+2+i} \quad A = \frac{1}{2(1+i)}, \ B = -\frac{1}{2(1+i)}.$$

Mettendo in evidenza $(z-1)$ e utilizzando lo sviluppo della serie geometrica si ottiene

$$f(z) = A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{(z-1)^{n+1}} + B\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2+i)^n(-1)^n}{(z-1)^{n+1}} =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Ai^n + B(2+i)^n(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}$$

Per il teorema dei residui , osservando che i residui nei due punti singolari (poli semplici) sono opposti, si ha $\displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)dz = \frac{\pi i}{1+i}$ se $r < 2\sqrt{2}$ mentre $\displaystyle\int_{\gamma_r} f(z)dz = 0$ se $r > 2\sqrt{2}$.

D Per ciascuna delle seguenti tre domande si indichi la (sola) risposta esatta, motivando brevemente la risposta.

1) Data la funzione $f(t)$ periodica di periodo $T = \frac{3}{4}\pi$, definita nell'intervallo $[0, \frac{3}{4}\pi)$ come

$$f(t) = sen\, t$$

e detta $S(t)$ la somma della sua serie di Fourier, calcolare $S(3\pi)$ e $S(2\pi)$

a) $S(3\pi) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $S(2\pi) = 1$

b) $S(3\pi) = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $S(2\pi) = 0$

c) $S(3\pi) = 0$, $S(2\pi) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2) Data la funzione $f(z) = \frac{\cos z}{(z-\pi)^{k+2}}$ $\quad k \in Z$, calcolare il res $(f(z), \pi)$ al variare di $k \in Z$

a) $res(f(z), \pi) = \frac{1}{(k+1)!}(-1)^{\frac{k+1}{2}}$ se $k \in \{... -5, -4, -3, -2\}$; $res(f(z), \pi) = 0$ se $k \in \{-1, 1, 3, ...\}$

b) $res(f(z), \pi) = 0$ se $k \geq 0$ pari; $res(f(z), \pi) = \frac{1}{k!}(-1)^{\frac{k+1}{2}}$ se $k \geq 0$ dispari oppure se $k < 0$

c) $res(f(z), \pi) = \frac{1}{(k+1)!}(-1)^{\frac{k+1}{2}+1}$ se $k \in \{-1, 1, 3, ...\}$; $res(f(z), \pi) = 0$ se $k \in \{...-5, -4, -3, -2, 0, 2, 4, ...\}$

3) Calcolare, usando la trasformata di Laplace, il segnale $y_n(t)$ che soddisfa il seguente problema

$$\begin{cases} y(t) \star y(t) = \frac{n+1}{n}\displaystyle\int_0^t y(\tau)d\tau = \quad t \geq 0 \\ y(0) = \frac{n+1}{n} \end{cases}$$

con $n \in N - \{0\}$; calcolare $\lim_{n\to+\infty} y_n(t)$ e dire dove la successione $y_n(t)$ converge uniformemente

a)

$$y_n(t) = 0; \quad \lim_{n\to+\infty} y_n(t) = 0$$

uniformemente per $t \geq 0$.

b)

$$y_n(t) = \frac{n+1}{n}t; \quad \lim_{n\to+\infty} y_n(t) = t$$

uniformemente per $t \geq \alpha > 0$.

c)

$$y_n(t) = \frac{n+1}{n} H(t); \quad \lim_{n \to +\infty} y_n(t) = H(t)$$

uniformemente per $t \geq 0$.

Soluzioni: a), c), c)