METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica

Esame del 22 aprile 2020

Nome e Cognome ______________________________ **matricola** ______________

Firma ____

MOTIVARE TUTTE LE RISPOSTE

E 1 Calcolare, usando la trasformata di Laplace, il segnale $y(t)$ che soddisfa

$$\begin{cases} y''(t) = e^{2t}\chi_{[0,1]}(t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

dove $\chi_{[0,1]}(t)$ rappresenta la funzione caratteristica dell'intervallo $[0,1]$.

Risposta

Dal momento che

$$L[e^{2t}\chi_{[0,1]}(t)] = \frac{e^{2-s}-1}{2-s}$$

si ha

$$Y(s) = e^2\frac{e^{-s}}{(2-s)s^2} + \frac{1}{(2-s)s^2} + \frac{1}{s^2}$$

e quindi

$$y(t) = e^2\frac{2(t-1)+1}{4} - \frac{e^{2(t-1)}}{4} + \frac{2t+1-e^{2t}}{4} + t$$

E 2

(i) Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{i-e^z}$$

trovare una striscia del piano complesso del tipo

$$S = \{z = x+iy : x \in R, \quad a < y < b\}$$

in cui tutti gli integrali della funzione lungo curve chiuse siano nulli.

(ii) Calcolare il residuo in tutti i punti singolari.

Risposta

I punti singolari sono

$$z_k = i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \quad k \in Z$$

$$res(f, z_k) = \frac{1}{-e^{z_k}} = \frac{1}{-i} = i \quad \forall k \in Z$$

Le strisce possibili sono

$$S = \{z = x + iy : x \in R, \quad a < y < b : \quad a > (\frac{\pi}{2} + 2k\pi),\, b < (\frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi)\}$$

D 1

(i) Dire per quali valori di $k \in Z$ la seguente funzione ammette primitiva in $C - \{0, 3\}$:

$$f(z) = \frac{1}{z^k} + \frac{1}{(z-3)^5}$$

(ii) Enunciare il teorema che si è usato nel punto precedente e dimostrare almeno una delle implicazioni.

Risposta

La funzione

$$\frac{1}{(z-3)^5}$$

ammette primitiva nell'insieme in $C - \{0, 3\}$ dal momento che non é singolare in $z = 0$ e il residuo in $z = 3$ (c_{-1} nello sviluppo di Laurent di centro 3) é nullo e dunque tutti gli integrali lungo curve chiuse sono nulli.

La funzione

$$\frac{1}{z^k}$$

non é singolare in $z = 3$ e ha integrale nullo su tutte le curve chiuse se $k \neq 1$ (residuo nullo nello sviluppo in serie di Laurent di centro 0) e integrale $2\pi i \neq 0$ lungo tutte le curve chiuse contenenti $z = 0$ se $k = 1$. Dunque $f(z) = \frac{1}{z^k}$ ammette primitiva in $C - \{0, 3\}$ se $k \neq 1$ e non ammette primitiva se $k = 1$. Pertanto la funzione iniziale $f(z)$ ammette primitiva in $C - \{0, 3\}$ se $k \neq 1$ e non ammette primitiva se $k = 1$.