Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2013-2014
Soluzioni appello del 29 ottobre 2014

Esercizio 1. Calcolare il seguente integrale con due cifre decimali esatte

$$\int_0^1 sen(\sqrt{x})\, dx.$$

Soluzione:

Ricordando lo sviluppo in serie di potenze per la funzione seno ed integrando la serie termine a termine, si ha:

$$\int_0^1 sen(\sqrt{x})\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 (\sqrt{x})^{2n+1}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_0^1 x^{n+\frac{1}{2}}\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{1}{n+\frac{3}{2}} =$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2n+3}.$$

Utilizzando la stima del resto per la serie di Leibniz si ha:

$$|R_n| \le |a_{n+1}| \le \frac{2}{(2n+3)!} \cdot \frac{1}{2n+5}$$

Imponendo che

$$\frac{2}{(2n+3)!} \cdot \frac{1}{2n+5} < 10^{-2}.$$

Per $n = 1$ la diseguaglianza é soddisfatta e dunque é sufficiente sommare i termini della serie $2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot \frac{1}{2n+3}$ fino al termine corrispondente a $n = 1$. L' integrale si approssima con due cifre decimali esatte nel seguente modo

$$\int_0^1 sen(\sqrt{x})\, dx \cong \frac{2}{3} - \frac{2}{3!} \cdot \frac{1}{5}.$$

Esercizio 2. Si consideri la funzione $f(t)$, periodica di periodo 2π, definita in $[0, 2\pi)$ da

$$f(t) = \begin{cases} cost & \text{if } \ 0 < t < \pi \\ sent & \text{if } \ \pi < t < 2\pi \\ a & \text{if } \ t = \pi \\ b & \text{if } \ t = 0. \end{cases}$$

- (i) Individuare a e b in modo che la serie di Fourier converga a $f(t)$ per ogni $t \in R$.
- (ii) Provare che la serie

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2)$$

converge e calcolare la somma (a_k e b_k sono i coefficienti di Fourier di $f(t)$; non é necessario calcolarli).

Soluzione:

(i) La funzione é regolare a tratti e dunque per ogni $t \in \mathbb{R}$ la sua serie di Fourier converge a

$$S(t) = \frac{f(t^+) + f(t^-)}{2},$$

pertanto deve essere che $a = -\frac{1}{2}$ e $b = \frac{1}{2}$ (studiando i casi $t = 0$ e $t = \pi$).

(ii) Ricordando l'uguaglianza di Parseval si ottiene che la somma della serie é pari a

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos^2 t\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} \sin^2 t\, dt = 1.$$

Esercizio 3.

- (i) Determinare i punti singolari della funzione

$$f(z) = \frac{1}{e^z + i},$$

classificarli e calcolarne il residuo.

- (ii) Si consideri il rettangolo $T = \{(x,y) \in R^2 : -1 \leq x \leq 1, a \leq y \leq b\}$ e la curva γ bordo di tale rettangolo. Scegliere $a, b \in R$ in modo da avere:

$$\int_\gamma \frac{1}{e^z + i} = -4\pi.$$

Soluzione:

(i) I punti singolari della funzione sono dati dagli zeri del denominatore. Pertanto essi sono

$$z_k = i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Si tratta di poli semplici.
Il residuo in tutti i punti singolari é lo stesso ed é dato da

$$res(f(z), z_k) = \frac{1}{(e^z)_{|z=z_k}} = -\frac{1}{i} = i.$$

(ii) Se $a > -\frac{\pi}{2}$ e $0 < b < \frac{3}{2}\pi$ allora $\int_\gamma \frac{1}{e^z+i} = 0$ perché non cade alcun punto singolare entro γ.
Si osservi che in generale, per il teorema dei residui, si ha che $\int_\gamma \frac{1}{e^z+i} = 2\pi i h i = -2\pi h$, dove h eíl numero di punti singolari che cadono entro γ. Pertanto se per esempio se $-\frac{5\pi}{2} < a < -\frac{\pi}{2}$ e $\frac{3}{2}\pi < b < \frac{7}{2}\pi$ si ha che $\int_\gamma \frac{1}{e^z+i} = -4\pi$ in quanto entro γ cadono solo due punti singolari.

Esercizio 4 (D1)**.**

(i)Dare la definizione di funzione L-trasformabile e di ascissa di convergenza.

(ii) Calcolare, motivando il procedimento, l'ascissa di convergenza della funzione di Heaviside

$$H(t) = \begin{cases} 1 & \text{if} \quad t \geq 0 \\ \\ 0 & \text{if} \quad t < 0 \end{cases}$$

Esercizio 5 (D2)**.**

(i) Dare la definizione di convergenza uniforme per successioni di funzioni $(f_n(x))_{n \in N}$.

(ii) Enunciare e dimostrare il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale.