Sapienza - Università di Roma
Facoltà di Ingegneria - A.A. 2014-2015
Soluzioni appello Metodi Matematici per l'Ingegneria del 4 settembre 2015

Esercizio 1. Data la funzione di variabile complessa

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} - \frac{1}{(1+z)^2},$$

si determinino gli sviluppi in serie di Laurent della funzione f con centro in $z_0 = 0$ nelle regioni $0 < |z| < 1$ e $|z| > 1$.

Soluzione:

Nella regione $0 < |z| < 1$ la funzione presenta il seguente sviluppo:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k z^{k-1},$$

dove si é utilizzato per la funzione $e^{\frac{1}{z}}$ lo sviluppo in serie della funzione esponenziale, mentre per la funzione $-\frac{1}{(1+z)^2}$ si é osservato che

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = D\left(\frac{1}{1+z}\right) = D\left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k z^{k-1}.$$

Nella regione $|z| > 1$ la funzione presenta il seguente sviluppo:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k \frac{1}{k!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{z^{k+1}},$$

dove, come nel caso precedente, per la funzione $e^{\frac{1}{z}}$ abbiamo utilizzato lo sviluppo in serie della funzione esponenziale, mentre per la funzione $-\frac{1}{(1+z)^2}$ si é osservato che

$$-\frac{1}{(1+z)^2} = -\frac{1}{z^2(1+\frac{1}{z})^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{z^{k+1}}.$$

L'ultima uguaglianza é dovuta al fatto che se $|z| > 1$ allora $|\frac{1}{z}| < 1$ e dunque si puó utilizzare lo sviluppo nella regione precedente.

Esercizio 2. Si studi la convergenza puntuale ed uniforme della seguente successione di funzioni di variabile complessa:

$$f_n(z) = \frac{e^{nz}}{n}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Soluzione:

Posto $e^z = t$, si ha che la successione di funzioni $f_n(t) = \frac{t^n}{n}$ è tale che

$$\lim_{n\to+\infty} |f_n(t)| = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \le 1 \\ +\infty & \text{se } |t| > 1. \end{cases}$$

In particolare la successione di funzioni $f_n(z)$ converge puntualmente a zero per

$$|t| \le 1 \iff |e^z| \le 1 \iff e^x \le 1 \iff x \le 0.$$

Posto ora

$$g_n := \sup_{|t|\le 1} \left|\frac{t^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

si ha che

$$\lim_{n\to+\infty} g_n = 0,$$

pertanto la successione di funzioni $f_n(z)$ converge uniformemente sull'insieme $\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x \le 0\}$.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(z) = \frac{z^2}{2z^3 + 1}$$

(i) si individui l'insieme di definizione di $f(z)$;

(ii) si calcoli l'integrale $\int_\gamma f(z)$ dove γ è la curva bordo dell'insieme

$$T = \{(x, y) \in R^2 : -1 \le x \le 0, -\frac{1}{2} \le y \le \frac{1}{2}\}.$$

Soluzione:

(i) L'insieme di definizione di f è $\mathbb{C} \setminus \{z_0, z_1, z_2\}$, dove $z_0 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $z_1 = -\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$, $z_2 = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

(ii) La funzione presenta tre singolarità: z_0, z_1, z_2 (vedere il punto precedente).
Delle tre singolarità, soltanto z_1 cade all'interno di γ. Pertanto, utilizzando il teorema dei residui, si trova che:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\, res(f(z), z_1) = \frac{\pi i}{3}.$$

Esercizio 4 (D1)**.** Si trovi il segnale $y = y(t)$ che risolve il seguente problema di Cauchy usando la trasformata di Laplace

$$\begin{cases} y'' + 2y = H(t) * e^{5t} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

dove H è la funzione di Heaviside.

Soluzione:

Posto $Y(s) = \mathcal{L}[y](s)$, ricordando che

$$\mathcal{L}[H * e^{5t}] = \frac{1}{s(s-5)},$$

e sostituendo nell'equazione si trova che:

$$Y(s) = F_1(s) + F_2(s) + F_3(s) = \frac{s}{s^2+2} + \frac{1}{s^2+2} + \frac{1}{s(s^2+2)(s-5)}.$$

È noto che $f_1(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_1(s)] = cos(\sqrt{2}t)$ e $f_2(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_2(s)] = \frac{1}{\sqrt{2}} sen(\sqrt{2}t)$. Inoltre $f_3(t)$ si può calcolare attraverso la formula

$$f_3(t) = \mathcal{L}^{-1}[F_3(s)] = \sum_{j=1}^{4} res(e^{st} f_3(s), s_j)$$

con $s_1 = 0$, $s_{2,3} = \pm i\sqrt{2}$ e $s_4 = 5$ singolarità di $F_3(s)$, si ha che il segnale cercato è:

$$y(t) = -\frac{1}{10} + \frac{e^{5t}}{135} + \frac{59}{54}\cos(\sqrt{2}t) + \frac{13}{27}\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t).$$

Esercizio 5 (D2)**.**

(i) Data $f : A \to C$, si dimostri che se f è olomorfa in A semplicemente connesso, allora f ammette primitiva in A.

(ii) Si trovi il più grande aperto del piano complesso in cui la funzione di variabile complessa $f(z) = \cosh(\frac{1}{z^2}) + z^3$ ammette primitiva.

Soluzione:

(ii) Il più grande aperto del piano complesso in cui $f(z)$ ammette primitiva è $\mathbb{C}^*$. Infatti la funzione è definita e olomorfa in $\mathbb{C}^*$ e $\int_\gamma f(z)dz = 0$ per ogni curva chiusa γ contenuta in $\mathbb{C}^*$. (Se γ non contiene $z_0 = 0$ ciò è dovuto al teorema di Cauchy. Se γ contiene $z_0 = 0$ ciò è dovuto al teorema dei residui e si ha che

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\, res(f(z), 0) = 0$$

poiché
$$res(f(z), 0) = c_{-1} = 0,$$
dove c_{-1} è il coefficiente di $\frac{1}{z}$ nello sviluppo in serie di Laurent.)