METODI MATEMATICI PER L'INGEGNERIA
Sapienza Università di Roma - Laurea Magistrale in Ingegneria Meccanica
Esame del 15 luglio 2016 - Soluzioni

E 1 Usando la trasformata di Laplace, determinare il segnale che risolve

$$\begin{cases} y''(t) = y(t) * H(t) \\ y'(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

dove $H(t)$ è la funzione gradino unitario.
Soluzione: Trasformando entrambi i membri si trova

$$s^2 Y(s) - 1 = \frac{Y(s)}{s} \Rightarrow Y(s) = \frac{s}{s^3 - 1}$$

$|Y(s)| = \left|\frac{s}{s^3-1}\right| \simeq \frac{1}{|s|^2}$, per $|s| \to \infty$, da cui possiamo determinare il segnale come:

$$y(t) = \mathrm{res}(\mathrm{e}^{st}Y(s), s_1) + \mathrm{res}(\mathrm{e}^{st}Y(s), s_2) + \mathrm{res}(\mathrm{e}^{st}Y(s), s_3)\,,$$

dove $s_1 = 1$, $s_2 = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ ed $s_3 = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ sono i punti singolari di $\mathrm{e}^{st}Y(s)$. Si tratta di tre poli semplici e i residui valgono

$$\mathrm{res}(\mathrm{e}^{st}Y(s)), s_1) = \frac{\mathrm{e}^{s_1 t}s_1}{3s_1^2} = \frac{\mathrm{e}^t}{3}$$

$$\mathrm{res}(\mathrm{e}^{st}Y(s)), s_2) = \frac{\mathrm{e}^{s_2 t}s_2}{3s_2^2} = \frac{\mathrm{e}^{s_2 t}s_2^2}{3s_2^3} = \frac{\mathrm{e}^{s_2 t}s_3}{3}$$

$$\mathrm{res}(\mathrm{e}^{st}Y(s)), s_3) = \frac{\mathrm{e}^{s_3 t}s_3}{3s_3^2} = \frac{\mathrm{e}^{s_3 t}s_3^2}{3s_3^3} = \frac{\mathrm{e}^{s_3 t}s_2}{3}$$

dato che $s_2^2 = s_3$, $s_3^2 = s_2$ e $s_2^3 = 1 = s_3^3$.

Quindi sostituendo

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{\mathrm{e}^t}{3} + \frac{\mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})t}(-\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})}{3} + \frac{\mathrm{e}^{(-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})t}(-\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2})}{3} = \\ &= \frac{1}{3}\Big[\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\frac{(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}t})}{2} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\frac{\sqrt{3}(\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}t})}{2\mathrm{i}}\Big] = \\ &= \frac{1}{3}\Big[\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\cos\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\Big) + \sqrt{3}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}\sin\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}t\Big)\Big]. \end{aligned}$$

E 2 Data la serie di funzioni in campo complesso

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\mathrm{e}^{z(n+1)} - \mathrm{e}^{zn}] \quad z \in \mathbb{C},$$

(i) si calcoli la somma parziale n-ma $S_n(z)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$,

(ii) si dica dove la serie converge puntualmente e uniformemente e se ne calcoli la somma $S(z)$.

. **Soluzione:**

(i) $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} [\mathrm{e}^{z(n+1)} - \mathrm{e}^{zn}] = \mathrm{e}^{(n+1)z} - \cancel{\mathrm{e}^{nz}} + \cancel{\mathrm{e}^{nz}} + \ldots + \cancel{\mathrm{e}^{z}} - 1$

(ii) Utilizzando che $|\mathrm{e}^{nz}| = |\mathrm{e}^{nx}||\mathrm{e}^{iny}| = \mathrm{e}^{nx}$, si trova il limite puntuale per le z a parte reale negativa. In $z = 0$ la $S_n(z) \equiv 0$, mentre negli altri casi non esiste limite finito. Quindi l'insieme di convergenza puntuale di $S_n(z) = \mathrm{e}^{(n+1)z} - 1$ è dato da $A = \{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) < 0\} \cup \{0\}$ ed il limite è

$$S(z) = \begin{cases} -1 & , z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) < 0, \\ 0 & , z = 0. \end{cases}$$

Si trova convergenza uniforme staccandosi dall'asse y, cioè negli insiemi della forma $\{z \in \mathbb{C} : \mathcal{R}e(z) \leq -a\}$, $a > 0$, dove infatti si può stimare

$$\sup_{\mathcal{R}e(z) \leq -a} |S_n(z) - S(z)| = \sup_{\mathcal{R}e(z) \leq -a} |\mathrm{e}^{nz}| = \mathrm{e}^{-na} \to_{n\to\infty} 0$$

E 3 Data la funzione

$$f(z) = \frac{1}{(i-z)(1-z^2)}$$

individuare le corone circolari del piano complesso di centro il punto $z_0 = 1$ in cui essa è sviluppabile in serie di Laurent (di centro il punto $z_0 = 1$) e trovare lo sviluppo di Laurent in un intorno forato di centro $z_0 = 1$.

Soluzione: La funzione $f(z) = \frac{1}{(\mathrm{i}-z)(1-z^2)} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z^2-1)} = \frac{1}{(z-\mathrm{i})(z-1)(z+1)}$ ha singolarità nei punti $z_0 = 1$, $z_1 = \mathrm{i}$ e $z_2 = -1$.

Le corone centrate in $z_0 = 1$ in cui la $f(z)$ è sviluppabile in serie di Laurent sono individuabili calcolando la distanza delle singolarità z_1 e z_2 da z_0. Poiché $|z_1 - z_0| = |\mathrm{i} - 1| = \sqrt{2}$ e $|z_2 - z_0| = 2$, si troveranno tre diversi sviluppi in serie di Laurent centrate in $z_0 = 1$ nelle tre regioni:
$B^*_{\sqrt{2}}(1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \sqrt{2}\}$,
$C_{\sqrt{2},2}(1) = \{z \in \mathbb{C} : \sqrt{2} < |z-1| < 2\}$,
$\mathbb{C} \setminus \overline{B}_2(1) = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > 2\}$.

Spezzando in fratti semplici $\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+1)}$, troviamo

$$\frac{1}{(z-\mathrm{i})(z+1)} = \frac{1-\mathrm{i}}{2} \cdot \frac{1}{z-\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{i}-1}{2} \cdot \frac{1}{z+1}$$

.

Valgono gli sviluppi

$$\frac{1}{z-\mathrm{i}} = -\frac{1}{\mathrm{i}-1-z+1} = -\frac{1}{\mathrm{i}-1} \cdot \frac{1}{1-\frac{z-1}{\mathrm{i}-1}} = \frac{1}{1-\mathrm{i}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-1}{\mathrm{i}-1}\right)^n, \qquad \text{per } |z-1| < \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-1+2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{z-1}{2})} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-1)^n}{2^n}, \qquad \text{per } |z-1| < 2.$$

Ne segue che lo sviluppo di $f(z)$ è

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-\mathrm{i})(z+1)} = \frac{1}{z-1}[\frac{1-\mathrm{i}}{2}\cdot\frac{1}{z-\mathrm{i}} + \frac{\mathrm{i}-1}{2}\cdot\frac{1}{z+1}] = \\ &= \frac{1}{z-1}\frac{\cancel{1-\mathrm{i}}}{2}\frac{1}{\cancel{1-\mathrm{i}}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{\mathrm{i}-1}\right)^n + \frac{1}{z-1}\frac{\mathrm{i}-1}{2}\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^n}{2^n} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^{n-1}}{(\mathrm{i}-1)^n} + (\mathrm{i}-1)\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-1)^{n-1}}{2^{n+2}}. \end{aligned}$$

nell'intorno forato $B^*_{\sqrt{2}}(1) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \sqrt{2}\}$.

D 1 Dare la definizione di $arg\, z$ e di $Arg\, z$ con $z \in C^*$. Studiare la continuità e l'olomorfia di $Arg\, z$, motivando il procedimento.

Soluzione: $Arg\, z$ è continua in $\mathbb{C}^{**}$, ma non è olomorfa in alcun aperto del piano complesso, come tutte le funzioni a valori puramente reali, come si verifica controllando che le equazioni di Cauchy-Riemann non sono soddisfatte.

D 2

(i) Trovare un aperto connesso del piano complesso in cui la funzione $f(z) = \frac{1}{z+5i}$ ammette primitiva (facoltativo: individuarla).

(ii) Trovare un aperto connesso del piano complesso in cui la funzione non ammette primitiva.

In entrambi i casi motivare la risposta.

Soluzione:
La funzione $f(z)$ è olomorfa in $A = \mathbb{C} \setminus \{-5\mathrm{i}\}$.

(i) Scelto comunque un aperto semplicemente connesso contenuto in $D \subseteq A$, sappiamo che per ogni curva γ chiusa e regolare a tratti la cui traccia è interamente contenuta in D si applica il teorema integrale di Cauchy. Ne segue che per queste curve $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$, condizione equivalente all'esistenza di una primitiva per f.

Quindi in qualunque $D \subseteq A$ semplicemente connesso, la funzione $f(z)$ ammette primitiva. Ad esempio si possono scegliere il semipiano $\mathcal{R}e(z) > 0$ oppure basta togliere a $\mathbb{C}$ una semiretta con origine in $-5\mathrm{i}$, come $\mathbb{C}\setminus\{z \in \mathbb{C} : z = x-5\mathrm{i},\ x \in \mathbb{R},\ x < 0\}$. La primitiva di $f(z)$ è $\mathrm{Log}(z+5\mathrm{i})+c$, c costante.

(ii) In qualsiasi intorno forato di $z_0 = -5\mathrm{i}$ la f non ammette primitiva. Ad esempio in $\mathbb{C} \setminus \{-5\mathrm{i}\}$. Scelta infatti qualsiasi curva chiusa che circuiti la singolarità, come $\gamma(t) = -5\mathrm{i} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$, $t \in [0, 2\pi]$, si trova che $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{res}(f(z), z_0) = 2\pi\mathrm{i} \neq 0$.